LES NOMBRES ENTIERS, LES RATIONNELS ET LES DÉCIMAUX

Ce chapitre se compose de deux parties inégales : la construction du nombre chez l'enfant, qui a été et qui est encore aujourd'hui l'objet de nombreuses recherches dans plusieurs disciplines, et l'apprentissage des nombres rationnels et décimaux qui intéresse principalement les didacticiens des mathématiques.

I. LA CONSTRUCTION DU NOMBRE (ENTIER) CHEZ L'ENFANT

Nous avons déjà rencontré la question de la construction du nombre, dans son approche phylogénétique, lorsque nous avons retracé l'histoire des nombres entiers au début de ce cours. Si nous rencontrons cette question une seconde fois, c'est que nous souhaitons l'aborder maintenant dans une approche ontogénétique c'est-à-dire de présenter la construction du nombre chez l'enfant. Il faut signaler dès à présent que c'est encore un sujet actuel de la recherche scientifique, nous tenterons donc à la fois d'en donner des résultats et de présenter les questions qui restent encore ouvertes aujourd'hui.

La question du nombre entier a été étudiée dans différents champs disciplinaires comme les mathématiques, la philosophie, la psychologie, la didactique, la neuropsychologie… Deux grands débats traversent encore aujourd'hui les travaux sur la construction du nombre : le premier est celui de l'inné et de l'acquis ; le second est de savoir si le nombre, dans sa construction mentale, est d'abord ordinal ou cardinal. Pour présenter les théories, parfois contradictoires, concernant la construction du nombre chez l'enfant, nous allons montrer comment elles s'inscrivent dans ces deux grands débats.

Afin de mieux comprendre les enjeux de la discussion, il conviendra de préciser d'abord quelques éléments de nature épistémologique sur la notion de nombre. Quelques repères théoriques seront alors apportés en montrant à la fois sur quelles hypothèses leurs auteurs se fondent, ce qu'ils apportent à la compréhension de la construction du nombre chez l'enfant et aussi comment ils aident à évaluer les troubles relatifs à cet apprentissage.

1. Les nombres entiers, première approche épistémologique et psychologique

Pour aborder le concept de nombre, nous nous référons à la théorie des champs conceptuels déjà évoquée, qui croise une approche épistémologique et psychologique des savoirs mathématiques. Nous commençons par étudier les situations puis nous abordons les représentations et les invariants opératoires.

11. Les situations où interviennent les nombres

On distingue quatre utilisations des nombres : la désignation, le rangement, la quantification et le calcul.

a. La désignation

La désignation utilise le nombre comme une étiquette, comme un nom. C'est par exemple le cas lorsqu'on indique un numéro : la route nationale 20 relie la région parisienne et les Pyrénées, le bus parisien numéro 96 relie la gare Montparnasse et la mairie des Lilas, l'indicatif téléphonique de la région parisienne est le 4 et celui des mobiles est le 6… Le fait que 4, en tant que nombre, soit inférieur à 6 est sans importance, sans signification dans cet usage.

b. Le rangement

Dans l'activité de rangement, le nombre permet de repérer les objets désignés les uns par rapport aux autres. Si je vous indique de prendre la troisième rue à droite vous saurez qu'il vous faut en passer une, en passer encore une autre mais tourner à la suivante. L'usage est le même pour repérer les bâtiments d'une rue. En France, on distingue les deux trottoirs de la façon suivante : l'un porte les immeubles de numéros pairs et l'autre ceux dont les numéros sont impairs. En outre les bâtiments sont numérotés dans l'ordre croissant lorsqu'on parcourt la rue dans un sens et donc dans l'ordre décroissant lorsqu'on la parcourt dans l'autre sens. À Paris, par exemple, les rues perpendiculaires à la Seine sont numérotées en partant de la Seine. Ainsi l'immeuble du 91 boulevard de l'Hôpital est-il situé avant celui qui est au 105, en partant de la gare d'Austerlitz qui est au bord de la Seine. On peut même penser, s'il n'y a pas eu de renumérotation, que l'on passera devant plusieurs immeubles en allant du 91 au 105.

c. La quantification

L'activité de quantification consiste à répondre à la question « Combien ? » Les mathématiciens distinguent le dénombrement de la mesure suivant que les éléments de la collection à évaluer se comptent un à un ou non. Par exemple, si l'on détermine le nombre de marches d'un escalier qui mène en haut d'une tour, c'est une activité de dénombrement : les marches peuvent se compter une à une. S'il s'agit en revanche de connaître la hauteur de la tour en référence à une longueur unité, les nombres entiers ne suffisent plus, il s'agit d'une mesure.

d. Le calcul

À un niveau élémentaire, le calcul répond d'abord à trois fonctions : comparer des grandeurs, évaluer la variation d'une grandeur ou déterminer le bilan d'une composition de plusieurs grandeurs ou de plusieurs variations.

Si l'on compare deux tours de hauteurs différentes, l'une de 144 m et l'autre de 153 m environ, on pourra dire (et cela convoque la composante ordinale des nombres) que la seconde est plus haute que la première ; le calcul permet de quantifier cette comparaison de grandeurs : on peut par exemple évaluer la différence de hauteur des deux tours $153 - 144 = 9$ donc la seconde tour mesure 9 m de plus que la première. Nous verrons, dans la partie consacrée aux problèmes additifs et aux activités de comptage ou de sur-comptage, que cette différence peut se déterminer autrement que par une activité calculatoire.

Les grandeurs sont fixes ou variables, ainsi la hauteur de la tour ne change pas avec le temps mais la taille du jeune Raphaël évoluera durant quelques années. La variation d'une grandeur se détermine par le calcul : si Raphaël à 12 ans mesure 144 cm et 153 cm à 13 ans, alors il aura grandi de $144 - 153 = 9$ cm ce qui, si l'on rapporte ces 9 cm à la taille initiale de 144 cm, correspond à une variation de +6,25%.

Deux grandeurs peuvent se composer pour en donner une troisième. Ainsi, en multipliant la longueur d'une pièce rectangulaire par sa largeur on détermine son aire, en divisant la longueur d'un parcours par sa durée on détermine la vitesse moyenne du déplacement. De la même manière, des variations peuvent se cumuler.

Toujours à un niveau élémentaire, le calcul permet de déterminer une valeur inconnue dans l'une des situations précédentes.

12. Les représentations

Dans ce cours, nous distinguons les représentations analogiques, langagières et mentales.

a. Les représentations analogiques (concrètes ou figurées)

Les représentations concrètes d'une collection sont réalisées avec des objets, comme les cailloux des anciens bergers ou les gommettes des enfants. Dans ce système chaque objet représente un élément de la collection. La représentation peut ne pas être strictement concrète mais seulement figurée comme l'est celle du troupeau par les entailles effectuées dans un os. Il en est de même dans l'écriture romaine des trois premiers nombres entiers qui sont écrits respectivement avec une, deux ou trois occurrences de la lettre I, chaque occurrence représentant une unité. En revanche la représentation du nombre cinq par la lettre V ne peut plus être qualifiée de représentation figurée, cette représentation fait référence à un langage.

b. Les représentations langagières

Les représentations langagières des nombres sont numérales ou numériques. Les représentations numérales sont les représentations verbales écrites – en mots qui peuvent être écrits ou lus – ou verbales orales – en mots qui peuvent être prononcés ou entendus. Les représentations numériques sont écrites en chiffres dans un système de numération.

Pour plus de détails concernant ces représentations et les traductions d'une représentation, se référer au travail effectué en enseignement dirigé.

c. Les représentations mentales

Les représentations mentales appartiennent au champ des sciences cognitives qui produisent une compréhension des phénomènes d'apprentissage fondée sur une modélisation de ce qui se passe dans le cerveau humain. Dans ces théories, les représentations mentales sont en quelque sorte les « objets » sur lesquels travaille notre intelligence.

Le meilleur exemple concernant les nombres, pour appréhender ce qu'est une représentation mentale, est sans doute la *représentation analogique* proposée par Dehaene et Cohen. Cette représentation procure une connaissance approximative des nombres, comme celle de savoir que 52 est inférieur à 60 et est environ à mi-chemin entre 0 et 100.

13. Les invariants opératoires

Les invariants opératoires concernant les nombres entiers sont nombreux si l'on inclut le dénombrement, la comparaison et les calculs.

Précisons celui du dénombrement d'une petite collection. Il repose sur la mise en œuvre coordonnée de plusieurs compétences : énoncer de la suite verbale numérique, organiser la collection à dénombrer pour procéder à une distribution de l'attention spatiale qui consiste à pointer du regard ou du doigt les éléments de la collection un à un en distinguant ceux qui sont déjà pointés et ceux qui restent à pointer, procéder à cette distribution spatiale, coordonner la distribution et l'énoncé de la chaîne verbale numérique, associer par une répétition éventuelle le dernier mot-nombre prononcé au cardinal de la collection. Remarquons que cet invariant opératoire n'est plus adapté pour dénombrer des grandes collections comme les places assises d'un amphithéâtre ou d'un stade, ou comme les grains de riz d'un paquet de 1kg.

En présentant les situations, les représentations et les invariants opératoires qui sont les trois composantes du concept de nombre au sens de la théorie des champs conceptuels, nous avons choisi une approche théorique des connaissances où ce que sait le sujet est référé à *ce qu'il peut en faire pour résoudre les problèmes qu'il rencontre*. Alors que nous posons la question de la construction du nombre chez l'enfant, nous tenons à souligner que ce choix n'est pas partagé par tous.

2. Deux questions récurrentes

Depuis ses débuts, la recherche sur la construction du nombre chez l'enfant rencontre deux questions fondamentales qui ne sont toujours pas réglées et qui la font progresser.

21. Le nombre est-il inné ou acquis ?

La première est celle de l'inné ou de l'acquis : le nombre résulte-t-il des formes de notre sensibilité ou bien seulement de l'expérience ? Les éléments de l'histoire du nombre que nous avons retracés suffisent à montrer que la question de l'inné ou de l'acquis doit être précisée : puisque certaines communautés humaines ne disposaient que de trois mots pour exprimer la pluralité des choses (un, deux et plusieurs), la position innéiste ne saurait porter sur la notion de nombre dans sa globalité mais reste pertinente sur les principes fondateurs de cette notion. Le fait qu'on puisse dénombrer les éléments d'une collection repose sur le principe d'identité de chaque élément de la collection qui sont comptés ensemble.

Lorsque je compte les pattes d'un chat, par exemple, je les compte ensemble et je néglige que les pattes sont différentes, au nom du principe d'identité. Ce principe me permet aussi de ne pas compter la queue parmi les pattes. Si l'on prend cet exemple du principe d'identité, la question est de savoir s'il est le fruit de la seule sensibilité ou bien s'il est une construction de l'expérience.

Les philosophes innéistes défendent l'idée que rien n'est dans l'entendement qui n'ait été d'abord dans les sens. Kant a marqué la philosophie en défendant la thèse d'une connaissance *a priori*, indépendante de l'expérience, et donc de l'enseignement, mais qui a la possibilité de s'accroître. Le psychologue Jean Piaget refuse l'idée de primauté de la sensation. Sa thèse est que le nombre n'est pas dans les choses pour passer à l'esprit mais que le nombre est construit par l'homme et que c'est à travers cette construction qu'il quantifie les choses qu'il perçoit.

22. Le nombre est-il d'abord cardinal ou ordinal ?

La seconde question est de savoir si, dans la chronologie de son élaboration, le nombre est d'abord cardinal ou d'abord ordinal. Pour comprendre l'intérêt de cette question, voyons quelles différences distinguent les deux conceptions.

a. Le nombre : définition cardinale

Dans sa définition cardinale, le nombre se comprend comme une « classe de classes ». Expliquons-nous sur un exemple : le nombre quatre. Quatre désigne le nombre de pattes du chat mais aussi le nombre de pattes du chien. Avec la définition cardinale, nous allons voir que dénombrer les pattes du chat implique à la fois de les penser comme étant semblables et différentes. Premièrement, suivant le principe d'identité, il faut négliger ce qu'elles ont de particulier pour ne considérer que ce qu'elles ont de commun ; autrement dit, il faut considérer l'ensemble des pattes du chat non pas comme une collection disparate mais comme une classe d'objets équivalents. Ensuite, pour savoir que le nombre de pattes du chat est le même que le nombre pattes du chien, on les met en correspondance terme à terme. Après les avoir considérées comme semblables, on distingue les pattes pour associer une à une celles du chat et celles du chien : la patte avant gauche, droite, arrière gauche, droite. Les deux classes, pattes de chat et pattes de chien, sont équivalentes du point de vue quantitatif parce qu'elles sont en correspondance terme à terme. Avec cette définition cardinale, le nombre quatre constitue la classe de toutes ces classes équivalentes aux pattes du chat. Il est important de remarquer qu'avec la définition cardinale, le nombre de pattes du chat et le nombre de pattes du chien sont d'abord égaux entre deux avant d'être égaux à quatre.

b. Le nombre : définition ordinale

Dans sa définition ordinale, le nombre se comprend comme une « classe de relations ». Pour nous expliquer sur cette nouvelle définition reprenons l'exemple du nombre quatre. On dispose maintenant d'un chat et de la chaîne verbale numérique ordonnée (un, deux, trois, quatre, cinq…). Avec la définition ordinale, dénombrer les pattes du chat demande de considérer momentanément que les pattes sont ordonnées comme le sont les mots de la chaîne verbale numérique, c'est-à-dire qu'il y en a une première, une deuxième, une troisième et une quatrième. Autrement dit, on crée une *relation* dans la classe des pattes du chat. Il est important de souligner que, au bout du compte, peu importe quelles étaient la première, la deuxième, la troisième et la quatrième patte. En effet, quel que soit le choix de relation, on obtiendra toujours une première, une deuxième, une troisième et, enfin, une quatrième patte. Le fait que les pattes du chat soient au nombre de quatre vient donc du fait que toutes les relations sont équivalentes : il y aura toujours une quatrième patte et jamais de cinquième patte. Avec cette définition, le nombre quatre est donc bien une classe de relation. Pour terminer, remarquons qu'avec la définition ordinale, le nombre de pattes du chat et le nombre pattes du chien sont d'abord chacun égaux à quatre avant d'être égaux entre eux.

3. Modèles du nombre chez l'enfant

Il n'est pas question ici de développer les différentes théories du nombre chez l'enfant mais seulement de présenter quelques courants de la recherche en précisant trois modèles parmi les plus importants, et en les situant par rapport aux deux grandes questions indiquées précédemment, celle de l'inné ou de l'acquis, et celle du cardinal ou de l'ordinal.

1. Le modèle de Piaget

Le modèle de Piaget est un modèle constructiviste où le sujet, durant son développement et selon une chronologie repéré par différents stades, construit ses connaissances par interaction avec le milieu environnant. Piaget distingue notamment « l'assimilation » où le sujet apprend des connaissances nouvelles sans reconsidérer les anciennes de « l'accommodation » où le sujet doit recomposer les connaissances anciennes pour intégrer les nouvelles. Les stades de développement, dans la théorie piagétienne, tendent à invalider les théories innéistes puisque des principes comme la conservation des quantités et l'inclusion des classes ne sont acquis qu'à partir d'un âge assez avancé.

Le modèle de Piaget s'oppose aussi à la théorie béhavioriste selon laquelle l'apprentissage d'un sujet est la réponse à un stimulus imposé par l'instructeur. Le béhaviorisme propose, d'une part, une approche expérimentale de l'apprentissage fondée sur nombreuses situations de conditionnement, et d'autre part de ne pas interroger ce qui se passe dans la tête du sujet qui apprend, considérée comme une « boîte noire ». Piaget n'abandonne pas la méthode expérimentale de la recherche sur l'apprentissage mais, d'une certaine manière, la révolution qu'il propose est, sans chercher à modéliser la boite noire, de fonder sa théorie sur celui qui apprend et non plus sur le protocole élaboré par celui qui instruit. Chez Piaget, sous certaines conditions développementales, l'action du sujet est la source et le critère de l'apprentissage. Cette action n'est jamais seulement langagière car il se méfie grandement des activités de type « perroquet » dans lesquelles les enfants peuvent exceller sans rien comprendre.

Pour la question du nombre, Piaget défend d'une part la nécessité d'antécédents logiques (permanence, conservation, inclusion…) et d'autre part un phénomène qu'il appelle « abstraction réfléchissante » qui permet au sujet de construire le nombre dans sa dialectique ordinale/cardinale, nombre qui ne saurait se réduire à la logique seule.

2. L'apparition des sciences cognitives

À l'époque de Piaget, le développement des mathématiques, de la logique, de la linguistique et de l'électronique conduit à l'informatique et à l'intelligence artificielle. Ces courants scientifiques ont donné naissance aux sciences cognitives dont l'objet de recherche est une modélisation de « la boite noire » c'est-à-dire de ce qui se passe dans la tête de celui qui apprend.

L'hypothèse majeure des sciences cognitive est d'apparenter le fonctionnement de l'intelligence à celui d'un ordinateur. L'ordinateur fonctionne par le calcul sur des nombres codés en base deux qui sont matérialisés par des ouvertures ou fermetures de circuits électriques. Ces nombres sont organisés en données qui sont stockées dans les mémoires de l'ordinateur : la mémoire vive – de travail – et la mémoire morte – de stockage. Le modèle du fonctionnement de l'intelligence est un calcul sur des représentations mentales présentes en Mémoire à Court Terme – analogue à la mémoire vive – dont la capacité est limitée qui sont récupérées de la Mémoire à Long Terme –analogue à la mémoire morte – et/ou reçues du milieu extérieur par un module appelé Registre d'Informations Sensorielles. Deux questions majeures restent posées :

- Existe-t-il une réalité physique aux représentations mentales, comme elle existe dans l'ordinateur avec les circuits électriques ?
- Le modèle propose un fonctionnement de l'intelligence mais comment se développe-t-elle ?

Les promoteurs des sciences cognitives reprochent au modèle piagétien de n'accorder aucune place au langage dans le fonctionnement de l'intelligence, le linguiste Chomsky a été un porte-parole important de cette critique. En revanche, les sciences cognitives restent discrètes quant au développement de l'intelligence.

3. Le modèle de Gelman

Les travaux de psychologie génétique de Piaget ne sont pas très bien perçus outre Atlantique où les mouvements des années 1970 ont conduit à mettre en avant la richesse de l'enfant plutôt que ses insuffisances dont les stades de développement font état. Les recherches tendent à montrer que les âges indiqués par Piaget dans ces stades sont beaucoup trop tardifs.

Gelman propose un modèle où l'enfant est pourvu d'un accès au nombre fondé sur cinq principes que nous allons expliciter.

- Le principe de d'ordre stable : on énonce toujours dans le même ordre les éléments de la chaîne verbale numérique ;
- Le principe de correspondance terme à terme : on dénombre les objets d'une collection en attribuant un mot-nombre à chaque objet ;
- Le principe cardinal : on associe le dernier mot nombre prononcé à la quantité d'objets de la collection qu'on cherche à dénombrer ;
- Le principe de non-pertinence de l'ordre : le nombre d'éléments de la collection caractérisé par le dernier mot nombre prononcé est indépendant du trajet choisi pour parcourir de manière exhaustive tous les objets de la collection ;
- Le principe d'abstraction : la nature des éléments de la collection à dénombrer est sans rapport avec le dénombrement.

Selon Gelman, ces principes seraient disponibles très tôt chez l'enfant, beaucoup plus tôt que ne l'indique le modèle piagétien, mais c'est leur mise en œuvre simultanée qui serait une difficulté pour le jeune enfant.

Ainsi l'on comprend que Gelman, avec le principe d'ordre stable, accorde une place au langage qui était négligé par Piaget. Selon ce modèle, le nombre se construit dans sa dimension ordinale d'abord par conjugaison des trois premiers principes. Des expériences montrent que des enfants de trois ans à qui l'on demande de contrôler un comptage sont effectivement capables d'effectuer ce contrôle pour une collection allant jusqu'à la vingtaine. L'inspiration innéiste du modèle est manifeste, pourtant dans les travaux actuels cet aspect n'est pas réellement pris en compte et les principes de Gelman sont parfois même utilisés comme des critères d'acquisition du nombre chez l'enfant ce qui va totalement à l'encontre du projet initial.

4. La neuropsychologie et le modèle de Mc Closkey

Une voie différente est venue nourrir la réflexion menée sur l'acquisition du nombre, c'est le travail spécifique sur les troubles du calcul. Les études réalisées sur des adultes victimes d'atteintes diverses ont apporté des résultats très nombreux en terme de régularités de relations entre tel type de lésion cérébrale et tel trouble du comportement. Ces résultats conduisent, par des approches différentes, à une compréhension de la conduite normale dans les cas non pathologiques.

Sur le plan de l'examen des troubles, le modèle que propose Mc Closkey permet de distinguer le traitement des nombres et le calcul, il est à l'origine de nombreux protocoles d'évaluation et d'interprétation des données recueillies. Ce modèle repose sur trois systèmes organisés autour d'une composante centrale :

- un système de compréhension des nombres organisés en modules spécifiques aux différents codes : verbal écrit (cent six), verbal oral (sãsis), arabe en distinguant le traitement lexical (0, 1, 6) et syntaxique (106) ;
- un système de production des nombres comprenant des modules analogues aux précédents ;
- un système de calcul comportant trois sous-systèmes : un sous-système d'interprétation des symboles écrits (les nombres et les mots qui indiquent l'opération à effectuer), un sous-système de récupération des faits arithmétiques (tables, résultats connus…) et un sous-système de gestion des calculs écrits et mentaux ;
- la composante centrale est la représentation sémantique des nombres qui est un point de passage obligé de toute activité numérique.

On ne peut pas situer le travail de Mc Closkey par rapport à la question de l'inné et de l'acquis car son modèle concerne l'adulte et ne prend pas en compte le problème développemental. En outre, malgré la composante centrale qui donne une place au sens de la notion de nombre, le modèle de Mc Closkey accorde une telle importance au langage que le nombre n'apparaît plus comme une notion opératoire abstraite et échappe par conséquent à la question de la primauté entre les dimensions ordinale et cardinale.

Mc Closkey propose un modèle de la connaissance du nombre qui ne se réfère pas aux situations génératrices des problèmes que le sujet pourra rencontrer et éventuellement résoudre. Ce choix semble assumé par l'auteur puisque le terme choisi dans ce modèle pour désigner les nombres n'est pas *numbers* mais *numerals*, terme qui est souvent traduit en français par « numéraux » plutôt que par nombres. La force de ce modèle est qu'il est cohérent avec les nombreuses études sur les troubles du traitement des nombres ou du calcul subis qu'ont subi des sujets atteints d'affections diverses, y compris dans les cas de dissociations comme, par exemple, celle de patients présentant un trouble de la compréhension des numéraux verbaux sans aucune atteinte de la compréhension des numéraux arabes.

5. L'interactionnisme social

Pour terminer ce paragraphe, signalons un courant théorique qui concurrence le constructivisme piagétien tout en gardant une perspective développementale, il s'agit de l'interactionnisme social qui met en avant le rôle du langage et des interactions sociales dans l'apprentissage. Pour Vygotski qui est à l'origine de ce courant, le développement procède ainsi d'un mouvement qui va de l'inter-psychique (les interactions avec les adultes et avec les pairs) à l'intra-psychique (intériorisation de procédés appris au cours des interactions sociales) où le langage (notamment le langage écrit) joue un rôle d'instrument psychologique. L'intérêt actuel pour ce courant s'explique en partie par le fait qu'il met en avant des processus qui se révèlent importants dans les phénomènes de transmission de savoirs : les fonctions de médiation (au sens d'intermédiaire prenant en compte les particularités du sujet qui apprend) et de tutelles assurées par l'enseignant.

En guise de conclusion de ce paragraphe consacré au nombre chez l'enfant, nous retiendrons que les chercheurs ont accumulé, depuis près d'un siècle, une importante somme de résultats qui ont conduit à des modèles en partie complémentaires et en partie contradictoires. Le chantier important qui conduira à une articulation de ces modèles demeure ouvert.

II. LES NOMBRES RATIONNELS ET LES NOMBRES DÉCIMAUX

Les recherches sur l'apprentissage les nombres rationnels et décimaux n'ont pas été entreprises par autant de disciplines que celles qui portent sur les nombre entiers. Dans ce cours, nous évoquerons les travaux les plus importants que l'on doit aux didacticiens des mathématiques.

Pour aborder la notion de nombre décimal dans sa classe l'enseignant peut choisir entre différentes présentations qui sont liées à différentes conceptions traduites par différentes écritures. C'est ce que montre les égalités :

$\frac{7}{2}=\frac{35}{10}=\frac{350}{100}=3{,}5=3{,}50=3\,\frac{1}{2}=35\times 10^{-1}=350\times 10^{-2}$ et $3{,}5$ m = 35 dm = 350 cm.

Soit il commence par introduire les nombres rationnels et l'écriture fractionnaire, les nombres décimaux sont alors des rationnels particuliers, ceux dont une écriture fractionnaire a pour dénominateur une puissance de dix.

L'enseignant peut aussi enrichir la droite numérique qui, à ce niveau, n'est encore graduée que d'unité en unité. Les nouveaux nombres sont obtenus par enrichissement de la graduation. L'unité est subdivisée en dix ce qui est associé à la création d'une sous-unité, le dixième. La droite est alors graduée de dixième en dixième. Et l'opération est reconduite « indéfiniment ».

À ce niveau, les élèves ont déjà manipulé des mesures de longueur écrites en mètres et centimètres ou en centimètres et millimètres, des mesures de masse en kilogrammes et grammes ou des prix en francs et centimes. L'enseignant peut aussi présenter les nombres décimaux en référence au système métrique. L'écriture décimale est alors une nouvelle écriture de ces nombres composés, par exemple 3,14 m est une nouvelle écriture de 3 m 14 cm.

Ces différentes présentations illustrent la diversité de ce qui est - ou de ce qui pourrait être - enseigné à l'école primaire à propos des nombres décimaux. Comme nous allons le voir, elles ne conduisent pas au même apprentissage pour les élèves. Cette diversité de choix possibles est encadrée par le programme officiel. Certains choix sortent-ils de ce cadre ? Afin de mieux comprendre les objectifs actuels de l'institution scolaire et éventuellement ceux des professeurs, situons l'enseignement des nombres décimaux dans l'histoire des débats animés dont il a été l'objet. Plutôt que de suivre cette histoire de façon chronologique, nous nous proposons, après un bref rappel historique, de la retracer par une étude des différentes présentations que nous venons d'évoquer.

1. Rappel historique sur les nombres décimaux

C'est la construction du système décimal, motivée en particulier par les nécessités du commerce, qui va permettre d'unifier le domaine numérique déjà bien pourvu mais de façon hétérogène comme en témoigne le vocabulaire : nombres absurdes, irrationnels, irréguliers, inexprimables, sourds, rompus... Rappelons que l'œuvre de Simon Stevin a contribué à nourrir le débat concernant les nombres (cf. DAHAN-DALMEDICO A. & PEIFFER J (1986), *Une histoire des mathématiques,* Paris : Seuil) :

> Au XVI^e siècle, Stifel (1487-1567) refuse encore aux irrationnels le statut de « vrai » nombre, alors que Simon Stevin (1548-1620), qui a une réelle pratique de calcul sur les nombres décimaux - c'est lui qui introduit en Europe les fractions décimales dans un petit traité édité en flamand en 1585 -, réagit vivement pour faire reconnaître les nombres irrationnels comme des nombres à part entière. Il s'élève contre l'usage de cette terminologie « d'irrationnel », « d'inexprimable ».
>
> Le débat perdurera au cours du XVII^e siècle autour de la lecture et de l'interprétation du livre V d'Euclide. Surtout, l'essor de tous les calculs à partir de cette époque, calculs algébrique, symbolique, infinitésimal, fait éclater le cadre dans lequel il se pose. Il ne sera élucidé théoriquement qu'au XIX^e siècle par les différentes constructions des réels...

Simon Stévin expose le système décimal dans L'arithmétique (1585) sous le titre : « *La disme enseignant facilement expedier par nombre entiers sans rompuz, tous compte se rencontrans aux affaires des Hommes* » puis, dans le *Traité des incommensurables grandeurs* (paru en 1634), il approfondit la notion théorique de nombre réel. Il insiste sur le fait que la représentation décimale illimitée permet d'assimiler les irrationnels à de véritables nombres, puisqu'ils en ont les mêmes propriétés opératoires. C'est bien à la fois par l'utilisation des fractions décimales pour écrire les nombres et par les calculs sur ces fractions que l'œuvre de Simon Stevin se distingue. Comme l'écrit Georges Ifrah dans son *Histoire universelle des chiffres* :

> Ces fractions (décimales) auront certes été connues bien avant lui (...) Mais à l'exception peut-être du mathématicien musulman Ghiyat ad din Ghamshid al Kashi (première moitié du XV^e siècle), dont les travaux auront été ignorés en Occident, personne, en dehors de Stévin, n'aura eu l'idée jusque-là de substituer ces fractions aux fractions ordinaires et n'aura élaboré de système de notation permettant d'unifier le domaine d'application des règles arithmétiques par un rapprochement avec celles qui s'appliquent aux nombres entiers.

A l'école primaire, l'apport des nombres décimaux comme élément d'unification théorique ne peut être présenté. En revanche, si les fractions sont connues et utilisées, la simplification qu'apporte la notation décimale pour calculer ou pour comparer peut être montrée aux élèves. L'histoire de l'enseignement des décimaux en France depuis 1945 montre que les choix possibles sont nombreux.

Nous allons donc examiner, pour chaque mode de représentation (c'est-à-dire d'écriture et de pensée relative à cette écriture), les problèmes que les nombres décimaux permettent de résoudre. Au fur et à mesure de cette étude, nous indiquons les objectifs de l'institution scolaire et leur éventuelle évolution.

2. Les décimaux représentés sous la forme d'un quotient

Certaines progressions envisagent l'introduction des rationnels (écrits sous la forme d'un quotient de deux entiers) avant celle des décimaux qui sont considérés alors comme des rationnels particuliers. Nous commençons par ce type de progression car c'est celui qui est actuellement indiqué, sans que cela soit impératif, par les instructions officielles : l'étude des rationnels précédant celle des décimaux.

> *Fractions simples*. Écriture, comparaison de fractions de même dénominateur.
>
> *Nombres décimaux*. Écriture à virgule, écriture fractionnaire, passage d'une écriture à l'autre ; (...)

Les compléments sur l'articulation école-collège précisent :

> A l'école primaire, seules quelques fractions simples usuelles (demi, tiers, fractions décimales) sont utilisées par les élèves, et éventuellement travaillées plus longuement dans le but d'introduire les nombres décimaux par le biais des fractions décimales.

Pour introduire les nombres rationnels, le professeur peut proposer aux élèves des situations différentes : des situations de comparaisons et de mesures, des situations de partage, ou encore des situations dans lesquelles les grandeurs sont soumises à des opérateurs. Dans ces situations, le recours à des fractions n'est pas motivé par le même objectif. Le sens que les élèves construisent et attribuent à ces nouvelles écritures numériques dépend de la situation qui leur a permis de les découvrir. Ces situations sont décrites de façon très précise par Nicolas Rouche dans *Le sens de la mesure*. Son objectif était de modéliser le passage des grandeurs aux nombres rationnels puis aux nombres décimaux.

1. Des rationnels pour comparer des grandeurs

On peut définir la multiplication d'une grandeur par un nombre naturel comme une addition réitérée de cette grandeur à elle-même. Par exemple, on multiplie par quatre la longueur d'un segment S en prenant la longueur du segment obtenu par quatre reports consécutifs du segment S. Si une relation d'ordre total est définie sur les longueurs, on peut comparer deux longueurs différentes. Dans certains cas que nous allons détailler dans les paragraphes suivants, on peut les situer l'une par rapport à l'autre, en n'utilisant que deux nombres naturels, cela permet d'indiquer de combien ces longueurs diffèrent. On dit alors que les grandeurs sont commensurables. La comparaison du périmètre d'un carré et de son côté est très simple : le périmètre est égal à quatre fois le côté. La comparaison du périmètre d'un disque et de son diamètre est impossible, ces deux grandeurs ne sont pas commensurables.

Comme nous allons le présenter, une telle activité de comparaison de deux grandeurs peut conduire à l'introduction des nombres rationnels.

a. Comparaison de deux grandeurs commensurables par la recherche d'une commune mesure

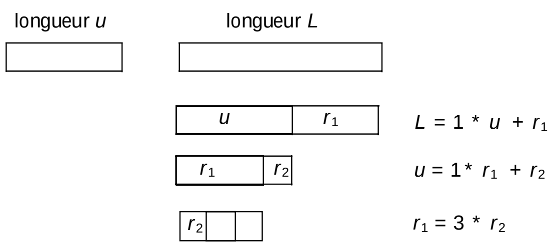
Considérons, par exemple, deux longueurs de segments u et L. La comparaison de u et de L par la recherche d'une commune mesure s'effectue comme suit :

- on reporte la petite longueur u autant de fois qu'on le peut dans la grande longueur L, on suppose qu'il y a un reste r_1 ;

- on reporte la longueur r_1 autant de fois qu'on le peut dans la longueur u, on suppose qu'il y a un reste r_2 ;

- on reporte la longueur r_2 autant de fois qu'on le peut dans la longueur r_1, etc.

Par exemple, supposons que « cela tombe juste » avec u qui va une fois dans L, r_1 qui va une fois dans u et r_2 qui va exactement trois fois dans r_1.



Alors r_2 est une commune mesure à u et à L : r_2 va exactement quatre fois dans u et sept fois dans L. Pour comparer L et u, nous dirons que L est à u comme 7 est à *4*. Ainsi, nous avons exprimé l'égalité de deux rapports, c'est-à-dire une proportion.

En choisissant u comme longueur unité, nous pouvons dire que la commune mesure r_2 est égale au quart de l'unité ($4 \times r_2 = u$). Nous écrivons $r_2 = \frac{1}{4}u$. Nous exprimons alors la mesure de L avec l'unité u en disant que la longueur L mesure sept quarts de l'unité u : $L = 7(\frac{1}{4}u)$.

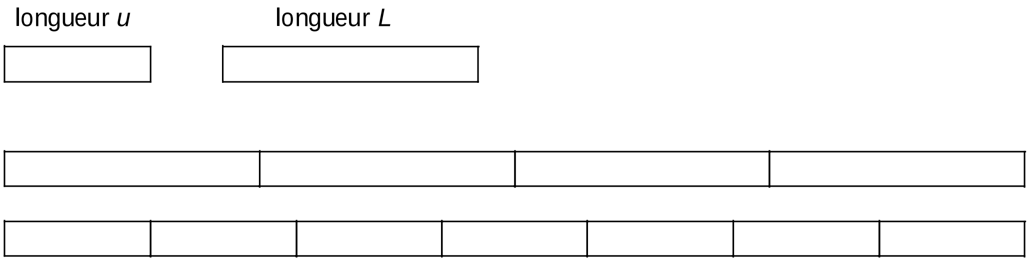
Une introduction aux fractions par ce type de mesure de longueurs est proposée par Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin. Les auteurs décrivent les procédures des élèves qui doivent dessiner un segment, rédiger et envoyer un message à un récepteur afin qu'il trace un segment de même longueur. La rédaction des messages conduit les élèves à mesurer leurs segments à l'aide d'une unité qui leur est fournie après le tracé. Leur tâche étant pratique, ils cherchent une mesure suffisamment précise et non une mesure théorique :

> Les segments de l'émetteur et du récepteur ne coïncident pas toujours. L'erreur provient soit de la manipulation, soit d'un reste négligé par l'émetteur, soit des deux.
>
> (...) le message comporte (...) une information qualitative sur le reste « *et un tout petit peu plus* » (...)

Mais ils parviennent à exprimer la longueur L à l'aide de l'unité u, l'écriture choisie par les élèves est plutôt de type $L = u + \frac{3}{4}u$.

b. Comparaison de deux grandeurs commensurables par la méthode de coïncidence

Reprenons les deux longueurs u et L. La comparaison de u et de L par la méthode de coïncidence consiste à déterminer deux entiers n et p tels que n reports de u coïncident avec p reports de L. Dans le dessin ci-dessous, sept reports de u coïncident avec quatre reports de L.

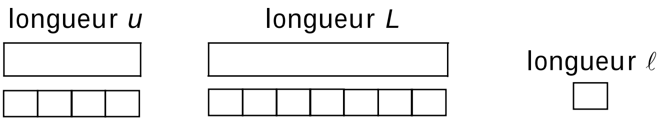


Nous pouvons ainsi comparer les longueurs L et u : quatre reports de L coïncident avec sept reports de u. En prenant la longueur u comme unité, la longueur L mesure le quart de sept unités : $L = \frac{1}{4}(7u)$.

Une introduction aux fractions par ce type de mesure de longueurs est proposée par Guy Brousseau dans une activité de mesure des épaisseurs des feuilles de papier. Les élèves cherchent à mesurer l'épaisseur d'une pile de feuilles de papier de même épaisseur en un nombre entier de millimètres. Ils font, par exemple, coïncider 60 feuilles et 7mm et déterminent l'épaisseur de la feuille par le couple (60f ; 7mm).

Mais revenons à notre exemple où quatre longueurs L coïncident avec sept longueurs u. Nous pouvons déterminer, grâce à cette coïncidence, une commune mesure à u et à L. Supposons qu'on puisse diviser u par 4 : notons ℓ la longueur qui, reportée 4 fois, égale u. Cette nouvelle longueur ℓ est la commune mesure de u et de L :

- 4 reports de ℓ coïncident avec u ;
- 7 reports de u coïncident avec 4 reports de L ;
- donc 7×4 reports de ℓ coïncident avec 4 reports de L ;
- c'est-à-dire que 7 reports de ℓ coïncident avec L.



Pour comparer u et L, nous dirons que u est à L comme 4 est à 7 ou bien que L est à u comme 7 est à 4. Et nous retrouvons l'expression que nous avions obtenue par la recherche directe d'une commune mesure : $L = 7(\frac{1}{4}u)$.

Les deux égalités montrent l'égalité de sept quarts de l'unité et du quart de sept unités : $7(\frac{1}{4}u) = \frac{1}{4}(7u)$ ce que l'on convient d'écrire $\frac{7}{4}u$.

c. Bilans des deux méthodes de comparaison

La recherche d'une commune mesure conduit à écrire $\frac{7}{4}u$ pour $7(\frac{1}{4}u)$. Cette représentation du rationnel $\frac{7}{4}$ correspond avec le vocabulaire des fractions où 4 est le dénominateur (il indique le *nom* de la partie de l'unité c'est-à-dire le nom de la sous-unité) et où 7 est le numérateur (il indique le *nombre* de ces sous unités). Elle correspond aussi avec la façon de lire la fraction : sept quarts de l'unité.

La méthode de coïncidence conduit à écrire $\frac{7}{4}u$ pour $\frac{1}{4}(7u)$. Par ailleurs, puisque quatre reports de la longueur L coïncident avec sept reports de l'unité, il s'ensuit que $\frac{7}{4}u + \frac{7}{4}u + \frac{7}{4}u + \frac{7}{4}u = 7u$ donc $4 \times \frac{7}{4}u = 7u$. Nous obtenons que $\frac{7}{4}$ est le nombre x solution de l'équation $4x = 7$. Cette propriété relie la fraction à la division. En effet, $4x = 7$ s'écrit $x = 7 \div 4$ or nous savons que $x = \frac{7}{4}$.

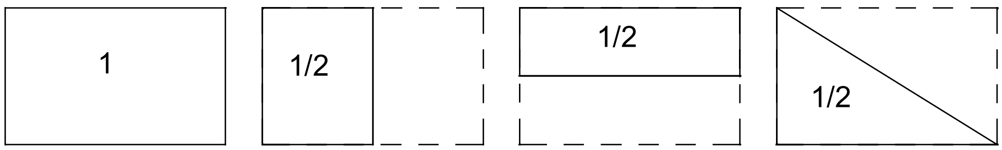
Finalement, $\frac{7}{4} = 7 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 7 = 7 \div 4$.

2. Des rationnels pour fractionner des grandeurs

Des activités proposées aux élèves permettent de fractionner une grandeur c'est-à-dire de la découper en parts dont les grandeurs sont d'égales mesures.

a. Fractions de l'unité

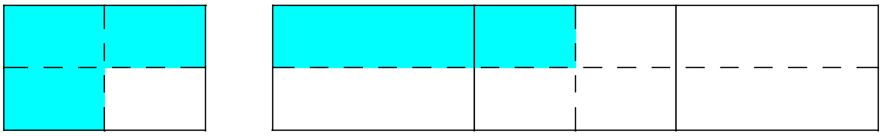
En pliant une bande de papier ou une feuille rectangulaire, on peut la fractionner en deux parts dont les aires sont identiques. Si la bande ou la feuille est l'aire unité, par convention d'écriture, chacune des aires des deux parts est notée $\frac{1}{2}$. Dans ce type d'activité, on fait remarquer aux élèves que deux parts de formes différentes peuvent être notées par la même fraction. C'est le cas dans le pliage d'une feuille rectangulaire suivant que l'élève la plie le long de la largeur, de la longueur ou d'une diagonale.



Sur cet exemple, de façon plus générale, l'écriture $\frac{1}{n}$ désigne l'aire d'une part lorsqu'il en faut n pour paver la feuille, et $\frac{p}{n}$ désigne l'aire de la part obtenue par juxtaposition de p parts d'aire $\frac{1}{n}$. On retrouve ici la valeur $\frac{1}{n}$ comme sous-unité (n est le dénominateur) et p comme le nombre de ces sous-unités (p est le numérateur). Ce type d'activité est proposé par Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin dans leur ingénierie pour l'enseignement des nombres décimaux. Les fractions permettant d'exprimer des longueurs et des aires, les élèves pourront déterminer le produit de deux rationnels par l'aire du rectangle dont les dimensions sont précisément ces deux facteurs rationnels.

b. Fractions de plusieurs unités

Le fractionnement par pliage peut être proposé sur une feuille qui représente plusieurs unités d'aire. Cette activité permet de retrouver l'autre sens de la fraction $\frac{p}{n}$ c'est-à-dire l'aire obtenue par le fractionnement d'une surface qui mesure *p* unités en *n* parts de même mesure. Par superposition, on retrouve l'égalité entre trois quarts de l'unité et le quart de trois unités :



Le fractionnement de plusieurs unités permet de retrouver aussi que $\frac{3}{4}$ est la solution de l'équation $4x = 3$. En effet, $\frac{3}{4}$ étant le quart de trois unités, on obtient ces trois unités en prenant quatre fois $\frac{3}{4}$. Cette situation tisse le lien entre la division et le fractionnement : $4 \times x = 3$ s'écrit $x = 3 \div 4$ or $x = \frac{3}{4}$.

3. Des rationnels pour opérer sur les grandeurs

Les rationnels peuvent encore être présentés comme des opérateurs appliqués à des grandeurs.

a. Un opérateur fractionnaire

L'exemple le plus classique est celui proposé par Guy Brousseau : l'agrandissement de puzzles. La fraction-mesure a déjà été manipulée par les élèves comme un ensemble de couples (nombres de feuilles, nombre de millimètres) pour évaluer l'épaisseur de feuilles de papier. Dans cette nouvelle présentation, la fraction-opérateur est un autre ensemble de couples : les couples (longueur initiale, longueur image) dans une situation d'agrandissement de figures planes sans déformation. Le meilleur représentant de cet ensemble serait le couple (longueur unité, image de l'unité).

La situation-problème

La situation d'étude proposée aux élèves est la suivante.

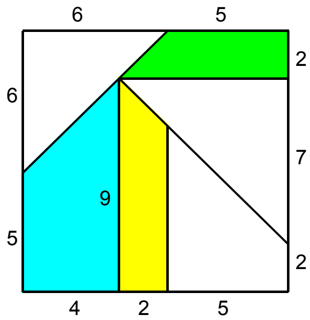


figure 7

Consigne

« Voici des puzzles (Exemple Tan-gram, figure 7) vous allez en fabriquer de semblables, plus grand que les modèles, en respectant la règle suivante : le segment qui mesure quatre centimètres sur le modèle devra mesurer sept centimètres sur votre reproduction. Je donne un puzzle par équipe de 5 ou 6, mais chaque élève fait au moins une pièce ou un groupe de 2 en fait 2. Lorsque vous aurez fini, vous devez pouvoir reconstituer les mêmes figures qu'avec le modèle. »

Le rationnel $\frac{7}{4}$ représente l'image de 1 dans l'agrandissement qui, à 4, associe 7 ($4 \mapsto 7$) ou qui, à 8, associe 14 ($8 \mapsto 14$), ainsi les élèves peuvent-ils calculer l'image de toute longueur entière en la multipliant par $\frac{7}{4}$. Ils utilisent implicitement une propriété des fonctions linéaires : $f(n) = n\,f(1)$. Remarquons que dans cette présentation, $\frac{7}{4}$ est envisagé comme un opérateur mais les nombres 4 et 7 ne sont pas envisagés eux-mêmes comme des opérateurs. Dans cette perspective, $\frac{7}{4}$ se compare à d'autres opérateurs. Pour comparer $\frac{7}{4}$, $\frac{8}{4}$ et $\frac{6}{4}$ c'est-à-dire les coefficients de ($4 \mapsto 7$), ($4 \mapsto 8$) et de ($4 \mapsto 6$), on se réfère à l'image de 4, on déduit que $\frac{7}{4}$ est inférieur à $\frac{8}{4}$=2 (on agrandit plus quand on obtient 8 à partir de 4 que quand on obtient seulement 7) et que $\frac{7}{4}$ est supérieur à $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$. D'une façon analogue, pour comparer $\frac{7}{4}$, $\frac{7}{3}$ et $\frac{7}{5}$ c'est-à-dire les coefficients de ($4 \mapsto 7$), ($3 \mapsto 7$) et ($5 \mapsto 7$), on se réfère à l'antécédent de 7, on déduit que $\frac{7}{4}$ est inférieur à $\frac{7}{3}$ (on agrandit plus quand on obtient 7 à partir de 3 que quand on obtient 7 à partir de 4) et que $\frac{7}{4}$ est supérieur à $\frac{7}{5}$. Ces comparaisons contribuent à conférer aux fractions-opérateurs le statut de nombre.

b. Deux opérateurs successifs

On peut aussi présenter une fraction, non pas comme un opérateur, mais comme une composée de deux opérateurs appliqués à une grandeur. Le numérateur et le dénominateur sont alors envisagés comme deux opérateurs, le premier multiplie et le second divise. Par exemple, l'opérateur $-\boxed{\times\frac{7}{4}}\rightarrow$ est la composée des deux opérateurs : $-\boxed{\times 7}\rightarrow$ suivi de $-\boxed{\div 4}\rightarrow$ ou bien $-\boxed{\div 4}\rightarrow$ suivi de $-\boxed{\times 7}\rightarrow$.

Les programmes du 2 janvier 1970 ont introduit l'enseignement de ces opérateurs de façon abstraite : l'attention ne devait pas être portée sur la grandeur initiale, la transformation et la grandeur image mais principalement sur la transformation. Les programmes du 7 juillet 1978 (ils tentent de rompre avec la distinction, sur laquelle nous reviendrons, entre les décimaux-mesures et les fractions-opérateurs) pointent l'intérêt d'utiliser ces compositions d'opérateurs pour éclairer la multiplication des décimaux : « *ainsi, 'mult. 3,761' revient à composer 'mult. 3 761' et 'div. 1 000'.* » Nicolas Rouche émet quelque réserve quant à l'utilisation de cette façon de considérer une fraction :

> Cette façon d'envisager la fraction est assez abstraite du fait qu'elle tend à détourner l'attention des grandeurs sur lesquelles on opère pour la concentrer sur les opérations elles-mêmes et leur enchaînement. Comme les grandeurs ne sont sans doute jamais totalement absentes de l'imagination, on peut dire que la fraction conçue comme pur produit de deux opérateurs est une vue extrême qui tend parfois à s'établir dans la pensée, mais sans jamais s'imposer complètement. C'est en tout cas une vue élaborée dont on peut douter qu'elle décrive jamais l'intuition spontanée d'un enfant.

Devons-nous interpréter cette réserve comme une critique a posteriori de cette partie des programmes, aujourd'hui abandonnée, dont l'ambition de formation mathématique serait jugée, par son excès, inadaptée au développement des élèves ?

4. Présentation des nombres décimaux

Avec les rationnels, les additions et les comparaisons conduisent souvent à de longs calculs. Cette contrainte est exploitée pour privilégier les nombres dont une écriture fractionnaire a pour dénominateur une puissance de dix. C'est ainsi que les auteurs qui ont choisi cette introduction des décimaux présentent les rationnels particuliers que sont les décimaux. Citons Guy Brousseau :

> Mais il se trouve que parmi toutes les opérations que l'on peut faire avec les rationnels sous leur forme fractionnaire, les plus longues, les moins faciles, sont justement les comparaisons et les sommes ou les différences. De telle sorte que, pour des raisons d'efficacité, les enfants vont très vite choisir d'eux–mêmes, parmi les fractions rationnelles, certaines - les décimales - qui permettent à la fois des calculs rapides et une représentation commode - une approche - des mesures rationnelles.

Citons aussi Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin :

> A partir des $\frac{1}{100}$; les élèves ont définitivement opté pour le calcul avec les fractions décimales (des centièmes, des millièmes), tant les calculs devenaient complexes. (...) Avec les

fractions décimales les calculs sont plus faciles (...) Il reste que l'écriture est très lourde (...) le maître propose aux élèves de chercher une écriture plus simple où on n'ait pas besoin d'écrire tous ces 0.

3. Les décimaux représentés sous la forme d'une somme

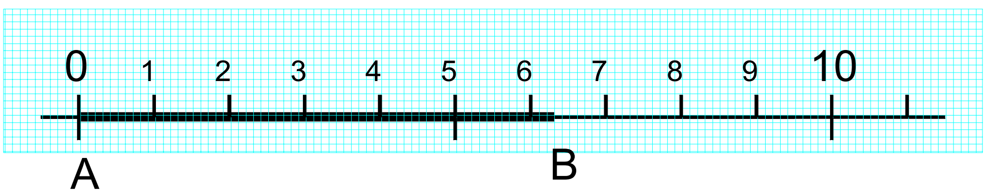
Comme nous l'avons déjà indiqué, une pratique préconisée par les instructions officielles, sans toutefois être imposée, consiste à présenter les nombres décimaux à partir des fractions décimales. Cette pratique est actuellement courante (voir la citation ci-dessous). Néanmoins, pour répondre à l'objectif des programmes quant à la connaissance des nombres décimaux, le professeur ne doit pas limiter son enseignement à une conception fractionnaire du nombre décimal et à une transformation de la fraction décimale en une écriture à virgule :

> Plusieurs aspects sont à mettre en place concernant les nombres décimaux : l'écriture à virgule est une autre écriture des fractions décimales, les décimaux sont de bons outils pour la mesure des grandeurs, pour repérer des points sur la droite numérique (aspect important pour la comparaison, l'encadrement, les approximations,...), les décimaux permettent d'approcher les quotients de deux entiers,...
>
> Ces différents aspects sont en général travaillés dès l'école primaire, l'introduction par les fractions décimales étant aujourd'hui la plus fréquente.

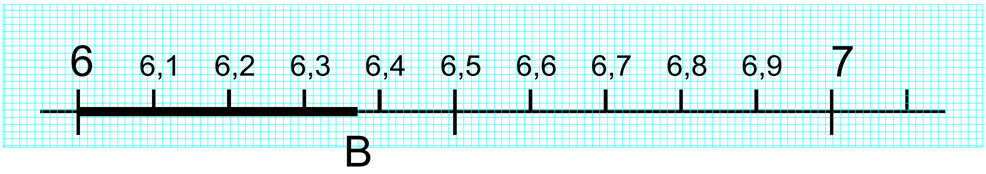
La méthode de coïncidence ou la détermination d'une commune mesure d'un segment donné avec un segment unité permet, nous l'avons vu, de mesurer des longueurs exprimées à l'aide de nombres rationnels. La présentation des nombres décimaux qui répondent aux besoins de mesurer des grandeurs peut alors être envisagée par le professeur à partir des fractions. Cependant, les auteurs des instructions officielles paraissent préférer les décimaux aux rationnels pour la mesure des grandeurs et le repérage des points : « *les décimaux sont de bons outils pour la mesure des grandeurs, pour repérer des points (...)* ». Cette formulation semble insister sur la nécessité d'une double présentation des nombres décimaux, l'une plutôt algébrique (les fractions décimales) l'autre plutôt topologique (comparaison, encadrement, approximations...) Le professeur peut donc choisir de mettre en relation le système métrique avec le système de numération décimale en utilisant la « droite numérique » c'est-à-dire, à l'école élémentaire, une droite graduée de gauche à droite, de un en un à partir de zéro.

1. Subdivisions successives de l'unité de mesure

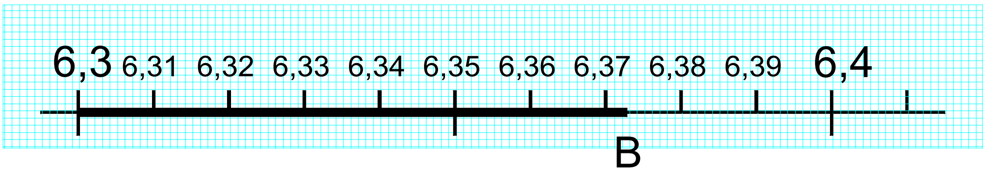
On trouve ce type de présentations dans les manuels pour le CM2 ainsi que dans des brochures destinées aux enseignants, le fil conducteur des activités est généralement le suivant. Soit un segment [AB] à mesurer, on dispose d'une unité de longueur et d'une graduation. Le « mesurage » montre que la mesure de la longueur du segment [AB] est comprise entre les deux nombres entiers 6 et 7 ; ce qui n'est pas très précis...



Le professeur propose de mieux voir ce qui se passe entre 6 et 7 en agrandissant dix fois cet intervalle. On subdivise alors le segment compris entre 6 et 7 qui mesure une unité de longueur, en dix segments de longueur $\frac{1}{10}$ et on complète la graduation en marquant $6+\frac{1}{10}$, $6+\frac{2}{10}$ ... que l'on écrit 6,1, 6,2... grâce au travail déjà effectué sur les fractions décimales et l'écriture décimale : $6+\frac{1}{10}=\frac{60}{10}+\frac{1}{10}=\frac{61}{10}=6{,}1$. Le mesurage montre alors que la longueur du segment [AB] est comprise entre 6,3 et 6,4 ; ce qui est plus précis mais...



Le professeur propose de mieux voir ce qui se passe entre 6,3 et 6,4 en agrandissant dix fois cet intervalle. On subdivise alors le segment compris entre 6,3 et 6,4 qui mesure $\frac{1}{10}$ unité de longueur, en dix segments de longueur $\frac{1}{100}$ et on complète la graduation en marquant $6{,}3+\frac{1}{100}$, $6{,}3+\frac{2}{100}$ ... que l'on écrit 6,31, 6,32... Le mesurage montre alors que la longueur du segment [AB] est comprise entre 6,37 et 6,38 ; ce qui est plus précis mais...



Dans les manuels, le processus s'arrête après un nombre fini d'étapes (généralement trois ou quatre) soit parce que le point B est précisément situé sur une marque de graduation, soit parce que la précision de la mesure est jugée suffisante. Mais, sur le plan théorique, il se peut que ce processus de mesure ne s'arrête jamais. La mesure du segment [AB] est alors exprimée par une écriture décimale illimitée.

2. Les écritures décimales illimitées

L'activité que nous venons de décrire repose sur un postulat selon lequel tout point de la droite numérique peut être associé à un nombre. Une conception unificatrice de la notion de nombre s'en dégage, un nombre est un représentant d'un point de la droite numérique. Cette conception permet de présenter de la même façon tous les nombres réels positifs, elle permettra aussi d'absorber les nombres relatifs quand, au collège, la droite numérique sera graduée dans les deux sens...

a. Un problème théorique difficile

Cette activité permet aussi d'aborder le cas de nombres qui auraient une écriture décimale illimitée. Les écritures décimales illimitées posent un problème d'enseignement : la situation pratique n'est pas la même si l'on obtient, pour la longueur du segment [AB], la mesure 6,372999... ou 6,373000... Les instructions du 22 novembre 1971 envisageaient, pour la classe de quatrième, de traiter les développements décimaux illimités afin de présenter les nombres réels. Le problème que nous venons d'évoquer n'était pas ignoré : « *On fera comprendre qu'il n'existe pas de développement entre 7,220000... et 7,21999... ce qui conduit à identifier de tels développements* ».

Aujourd'hui, aucun apprentissage n'est associé à ces nombres. Néanmoins, des nombres qui ont une écriture décimale illimitée sont rencontrés par les élèves lors de la division de deux entiers « poussée après la virgule ». Pour convaincre leurs élèves que « la division ne s'arrêtera jamais », les enseignants expliquent souvent que la suite des décimales comporte une période à partir du moment où l'on obtient un reste qui a déjà été obtenu, et cela ne manquera pas d'arriver puisque le nombre de restes possibles est limité. Certains professeurs de collège évoquent aussi le fait que 0,999... et 1 désignent le même nombre en utilisant les deux écritures du tiers, $\frac{1}{3}$ et 0,333... :

$$\frac{1}{3} = 0{,}333... \text{ donc } 3 \times \frac{1}{3} = 3 \times 0{,}333... \text{ or } 3 \times \frac{1}{3} = 1 \text{ et } 3 \times 0{,}333... = 0{,}999...$$

b. Le cas des rationnels

La propriété « tout nombre dont l'écriture décimale illimitée est périodique à partir d'un certain rang peut s'écrire comme le quotient de deux entiers » n'est pas enseignée. On obtient, par exemple, une écriture fractionnaire du nombre a = 3,8757575... que l'on note $3{,}8\underline{75}$ par le raisonnement suivant :

$$\begin{array}{lrcl} & 10\,a & = & 38{,}\underline{75} \\ \text{et} & 1000\,a & = & 3\,875{,}\underline{75} \\ \text{Donc} & 990\,a & = & 3\,875{,}\underline{75} - 38{,}\underline{75} \\ & & = & 3\,875 - 38 = 3\,837 \\ \text{et donc} & a & = & \dfrac{3\,837}{990} \\ \text{soit, en simplifiant :} & a & = & \dfrac{1\,279}{330} \end{array}$$

Cette propriété permettrait de conclure une première étude des nombres. Les nombres de la droite numérique sont les nombres réels, tous ces nombres ont une écriture décimale, la partie décimale étant éventuellement illimitée. Les nombres réels qui ont une écriture décimale illimitée périodique à partir d'un certain rang sont les nombres rationnels, ils peuvent s'écrire comme un quotient de deux entiers. Les nombres réels qui ont une écriture décimale limitée sont les nombres décimaux que l'on peut écrire aussi sous la forme d'une fraction décimale ou d'une autre fraction. Remarque : les nombres décimaux sont rationnels, il suffit d'écrire une infinité de zéros à la suite du dernier chiffre de la partie décimale pour obtenir écriture décimale illimitée périodique à partir d'un certain rang. Les autres nombres réels sont les irrationnels.

c. Peut-on classer les nombres par leurs écritures ?

Cette présentation classe les nombres selon des critères d'écriture. Ce classement apparaît tôt dans la scolarité alors que les arguments développés précédemment sont difficiles, ils ne seront accessibles que bien plus tard dans la vie des élèves si tant est qu'ils soient vraiment accessibles durant la scolarité obligatoire commune à tous les élèves. Citons un livre du maître qui illustre la confusion possible : « *Il s'agit d'un nombre 'périodique'. Ce n'est pas un nombre décimal.* » C'est l'inconvénient majeur de cette présentation, elle induit la conception suivante. Tous les nombres ont une écriture décimale. Ceux qui n'ont pas de partie décimale sont les nombres entiers. Ceux qui ont une partie décimale limitée sont les décimaux, ils ne sont pas entiers. Ceux qui ont une partie décimale illimitée périodique sont des rationnels, ils ne sont pas décimaux. Ainsi, les nombres entiers ne seraient pas décimaux, les décimaux ne seraient pas rationnels et $0{,}\underline{9}$ ne serait pas décimal.

3. Approche décimale d'un rationnel ou d'un irrationnel

Ces deux situations sont bien connues des didacticiens, mais nous ne les avons retrouvées ni dans des manuels ni dans des brochures destinées aux enseignants. Ces situations ne contribuent donc pas à l'élaboration des conceptions des élèves sur les nombres décimaux à l'école primaire, sauf pour ceux dont les enseignants utiliseraient ces propositions de didacticiens...

a. Diviser pour approcher un rationnel

En CM2 comme en sixième, les décimaux qui permettent d'approcher des quotients sont généralement obtenus par une mise en œuvre de la technique de la division, le problème alors posé est celui de la difficile interprétation du reste.

Exemple : pour approcher le rationnel $\frac{22}{7}$ on divise 22 par 7 et l'on « pousse » la division jusqu'à obtenir la précision souhaitée. Si l'on souhaite une précision d'un millième, on continue la division jusqu'à trois chiffres après la virgule au quotient et l'on obtient $3{,}142 < \frac{22}{7} < 3{,}143$.

$$\begin{array}{r|l}
2\ 2 & 7 \\
1\ 0 & 3,1\ 4\ 2 \\
3\ 0 & \\
2\ 0 & \\
6 &
\end{array}$$

b. Le jeu du radar ou jeu de l'explorateur

Dans la progression pour l'enseignement des rationnels et des décimaux de Guy Brousseau, les élèves construisent l'ensemble des rationnels, l'addition, la soustraction et la multiplication de deux rationnels, la division d'un rationnel par un entier et une relation d'ordre. Alors seulement, des situations d'approximation de rationnels par des décimaux sont proposées aux élèves : le jeu de l'explorateur.

> Le joueur A choisit une fraction comprise entre 0 et 10 (sans la dire à haute voix). Il l'écrit sur un papier qu'il met dans sa poche. Le joueur B cherche à deviner dans quel intervalle de naturels consécutifs se trouve cette fraction. Pour cela il a le droit de poser des questions, par exemple « est-ce que ta fraction se trouve entre 7 et 9 ? » A n'a le droit de répondre que par « oui » ou par « non ». (...)
>
> Le maître (...) introduit de nouvelles règles au jeu précédent : on va essayer de continuer le jeu en essayant d'encadrer la fraction de l'adversaire dans l'intervalle le plus petit possible. (...)
>
> La difficulté consiste autant à trouver des fractions entre deux autres, qu'à comparer celle qu'on a choisie à celles du « filet » de l'adversaire (...)
>
> Cependant déjà, les encadrements décimaux apparaissent (...) les parties se déroulent beaucoup plus vite et les dénominateurs s'enflent (...) Encadrée par un intervalle très petit : 1/1 000 000 la fraction 22/7 n'est pas encore attrapée. Une discussion animée s'installe (...)

c. Trouver le côté du carré d'aire 27

Dans leur ingénierie pour l'enseignement des décimaux, Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin proposent une situation de recherche des rectangles d'aire 27 ; chaque rectangle est associé à un couple (a, b) où a et b sont ses dimensions et chaque couple est représenté sur un graphique. Dans cette famille de rectangles, existe-t-il un carré ? Telle est la question posée aux élèves.

> Ils procèdent par encadrement : ils nomment la mesure du côté du carré, x par exemple, et cherchent à encadrer x.
>
> $5 \times 5 = 25$ $\quad$ $6 \times 6 = 36$ $\quad$ $5 < x < 6$
>
> Le problème est de s'approcher le plus possible d'un x tel que $x \times x = 27$.
>
> 1ére étape : partager en deux l'intervalle d'incertitude (...) les calculs deviennent compliqués. (...)
>
> 2ème étape : passage au $\frac{1}{10}$. (...) Nous assistons là à un conflit entre deux points de vue à prendre en compte si on veut progresser efficacement :
>
> - simplifier les calculs d'où le choix de $\frac{1}{10}$;
>
> - faire converger rapidement le processus de recherche du carré et donc couper en deux.
>
> 3ème étape : passage au $\frac{1}{100}$ et abandon du graphique. (...) Il reste que l'écriture est très lourde lorsqu'il s'agit de calculer le carré d'un tel nombre et d'écrire le résultat (...)

d. Conclusion

Les deux situations montrent que les décimaux sont des bons outils pour les approximations en ce qu'ils permettent d'effectuer des calculs plus simplement et qu'ils évitent les difficultés liées à l'intercalation de nouvelles fractions comprises entre deux autres pour affiner la précision de l'approximation. Leurs auteurs privilégient les situations où les savoirs apparaissent selon des critères d'utilité pour résoudre un problème, cela explique l'apparition tardive de l'écriture décimale : « *Il reste que l'écriture est très lourde (...)* ».

Abordons maintenant les décimaux écrits sous la forme d'un produit explicite ou implicite : $3,5 = 35 \times 0,1 = 35 \times 10^{-1} = 350 \times 10^{-2}$ ou 3,5 m = 35 dm = 350 cm.

4. Les décimaux représentés sous la forme d'un produit

Comme nous l'avons vu, à l'école primaire, la présentation des décimaux sur la droite numérique par subdivisions réitérées de l'unité est toujours limitée à quelques itérations. Cette simplification permet d'enseigner parallèlement le système décimal et le système métrique : il suffit de limiter le nombre de chiffres après la virgule au rang des plus petites unités pratiquées couramment.

Une telle simplification a priori figurait explicitement dans les programmes de 1928 et 1945. Elle engendre une dépendance entre les nombres décimaux et les mesures ainsi qu'une altération des nombres décimaux qui sont, dans les faits, « ramenés » à des entiers.

1. Les mesures décimales et les changements d'unités

Afin de mieux montrer les conséquences d'un enseignement qui limite les nombres décimaux à l'expression de mesures usuelles, citons quelques extraits du programme du cours moyen de 1945 :

> Les élèves ont presque tous entendu parler de prix exprimés en francs et centimes, de poids exprimés en kilogrammes et grammes, de capacités exprimées en litres et centilitres, de distances exprimées en kilomètres et mètres, etc. Il importe de leur faire comprendre l'équivalence des deux expressions d'un nombre concret, soit avec deux unités, soit avec une virgule : 2 mètres et 15 centimètres = 2,15 m. (...)
>
> Il est bon que les chiffres décimaux, complétés au besoin par des zéros, correspondent à des unités pratiques. On est ainsi ramené à indiquer un nombre en francs avec deux décimales (c), un nombre en mètres avec deux ou trois décimales (cm ou mm), un nombre en kilomètres avec trois décimales (m), un nombre en litres avec deux décimales (cl), un nombre en mètres cubes avec trois décimales (dm^3), etc.
>
> *Opérations.* - Les règles de changement d'unité permettent d'expliquer - sinon de justifier - la pratique des opérations. (...) On peut justifier la règle de la virgule dans la multiplication par un double changement d'unité.

Voyons les effets d'un tel enseignement sur les apprentissages des élèves.

a. Des décimaux comme couple de deux entiers

Le premier effet d'un tel enseignement est, mais c'est bien le choix de simplification opéré, que *les décimaux seront implicitement limités au rang des plus petites unités pratiquées couramment*.

b. L'ordre sur l'ensemble des décimaux est perturbé

Le deuxième effet qui est une conséquence directe du précédent est que les relations topologiques sur l'ensemble de ces décimaux enseignés ressemblent plus aux relations sur l'ensemble des entiers naturels qu'à celles sur l'ensemble des décimaux, citons Guy Brousseau :

> (...) toutes les relations topologiques vont être perturbées et pendant longtemps : l'enfant ne trouvera pas de décimal entre 3,25 et 3,26, mais par contre, il trouvera un prédécesseur dans D à 3,15 : ce sera 3,14 etc. Même s'il corrige sa réponse sur tel ou tel point, les raisonnements intuitifs vont être guidés par ce modèle erroné (...)

L'exemple utilisé dans les programmes de 1945 montre bien comment le nombre décimal 2,15 est considéré comme un couple de deux entiers 2 et 15 et comment l'écriture décimale est restreinte à ce que nous conviendrons d'appeler un « format social » des décimaux-mesures. Chacun des deux entiers 2 et 15 est affecté de son unité, le mètre pour la partie entière, le centimètre pour la partie décimale. Plus généralement, la partie entière est associée à l'unité principale usuelle (m, m^2, ℓ, kg, F...) la partie décimale sa sous-unité usuelle (cm ou mm, dm^2, dℓ, g, c...) Les nombreuses études de différentes évaluations des acquis des élèves ont montré que cette conception des nombres décimaux cause de nombreuses erreurs : en 1979, une enquête de l'INRP a montré que 37% des élèves de CM2 déclaraient 3,2 inférieur à 3,135. Et parmi les élèves qui répondent que 3,135 est inférieur à 3,2, certains *rangent les décimaux en ordre inverse de la longueur de la partie décimale...*

c. Le calcul est perturbé

Le troisième effet, est une conséquence sur le calcul, et particulièrement sur le calcul mental, de la conception du nombre décimal comme un couple de deux entiers : *on rencontre fréquemment chez les élèves des égalités du type* $2,3 \times 2,3 = 4,9$ *ou* $17,3 + 21,8 = 38,11$. Partie entière et partie décimale étant traitées séparément, n'étant jamais mises en relation, c'est le sens des opérations sur les nombres décimaux qui est perturbé.

d Une opposition renforcée entre nombres concrets et nombres abstraits

Le quatrième et dernier effet que nous énoncerons de cet enseignement qui limite les nombres décimaux à des « nombres concrets » porte sur le rapport entre les nombres rationnels et les nombres décimaux. Dans cet enseignement, une opération entre deux nombres décimaux correspond nécessairement à une opération entre les grandeurs dont ils expriment la mesure. Si un « nombre abstrait » (c'est-à-dire un nombre qui n'est pas la mesure d'une grandeur) intervient dans un calcul, ce nombre est soit entier soit une fraction mais pas un décimal. Une rupture entre décimaux-nombres concrets et rationnels-nombres abstraits est orchestrée.

> Dans tous les manuels de l'époque est cependant insérée une leçon au cours de laquelle on s'efforce de montrer qu'un nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale et inversement, ou, si l'on préfère qu'un nombre dit concret : 0,5 m peut prendre l'aspect d'un nombre abstrait $\frac{5}{10}$ opérant sur une grandeur : le mètre. Cette séance se réduit à une leçon de choses sur des écritures. Nulle part, on ne cherche à montrer que ces écritures pourraient remplir la même fonction opératoire.

Les programmes qui ont succédé à ceux de 1945 n'ont pas modifié cette approche des nombres décimaux jusqu'en 1970. La réforme mise en place cette année bouleverse l'enseignement du calcul à l'école élémentaire. L'écriture de nombres dans différentes bases influence la présentation des nombres décimaux qui sont alors des cas particuliers de nombres à virgules : ceux pour lesquels les groupements se font par dix. Le sens de chaque chiffre de l'écriture d'un nombre à virgule est abordé par différents exemples. Néanmoins, le nombre décimal reste le nombre de la mesure, opposé à la fraction qui reste un opérateur. Le nombre décimal reste considéré comme un entier à un changement d'unité près :

> On remarquera qu'à tout nombre naturel exprimant une mesure on peut associer, par un changement d'unité convenable, un nombre décimal et qu'à tout nombre décimal on peut associer, par un changement d'unité, un nombre naturel (et cela de diverses façons).

Toutes ces remarques ont conduit à une tentative de l'institution scolaire pour dissocier davantage, dans l'enseignement, le nombre décimal de la mesure et de ses unités. Plutôt que d'ancrer la notion de nombre décimal dans une pratique sociale, les enseignants sont invités à introduire cette notion par le problème mathématique de la mesure d'une grandeur avec une seule unité. L'objectif est de relier, dès le départ, le nombre décimal à la fraction décimale, chaque chiffre de l'écriture décimale trouvant sa signification dans la fraction d'unité qu'il représente.

2. Les grandeurs familières

Dans sa thèse, Jeanne Bolon a montré qu'actuellement ni les manuels pour l'école élémentaire ni ceux pour le collège ne proposent d'activités qui portent effectivement sur les grandeurs familières. Dans sa comparaison de l'ingénierie de Nadine et Guy Brousseau à celle de Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin, elle remarque que :

> La progression Brousseau & Brousseau inclut l'étude de décimaux liés aux grandeurs familières. Certaines grandeurs sont effectivement mesurées ou fabriquées (masses, capacités). La progression Douady & Perrin n'inclut pas d'étude de grandeurs familières (sauf la longueur).

Toujours dans sa thèse, Jeanne Bolon, propose une série de douze *suggestions* progressives sous forme de fiches d'activités commentées. Trois d'entre elles portent sur les grandeurs familières.

a. Format social et notation mathématique des décimaux

Première suggestion, proposer des situations « quotidiennes » qui portent sur des relations additives ou multiplicatives et sur des problèmes d'approximation. Les grandeurs ne sont pas effectivement mesurées mais elles sont étudiées dans ces situations. L'auteur précise :

> Sur les grandeurs familières, longueurs, prix, masses, capacités, il n'est pas nécessaire de connaître les propriétés des décimaux pour faire des calculs additifs à la main. On convertit les centimes en francs ou les centimètres en mètres dès que la somme dépasse 100 ; on fait de même pour des kilomètres et mètres, pour des kilogrammes et grammes.

La notion de nombre décimal n'est pas encore approfondie. Dans des situations multiplicatives, les élèves utilisent la calculatrice qui élimine les « zéros inutiles » et qui n'arrondit pas les mesures décimales des grandeurs en respectant le format social. Ainsi émergent des difficultés liées aux contradictions entre ce format social et la notation mathématique des décimaux que les élèves doivent lever en travaillant le sens et l'utilité de ces écritures.

b. Relations entre la mesure, le nombre et l'unité

Deuxième suggestion, proposer des situations où les élèves doivent communiquer sur des grandeurs mesurées avec des unités différentes afin de déterminer la plus grande. Les élèves doivent, par exemple comparer la longueur d'une ficelle rouge et celle d'une ficelle bleue sachant que la ficelle rouge a pour longueur 35 avec l'unité A, la ficelle bleue a pour longueur 4 avec l'unité B et qu'il faut 10 A pour faire un B. L'objectif est que les élèves découvrent la relation entre le nombre qui indique la mesure et l'unité de mesure pour prévoir comment varie le nombre quand l'unité est multipliée ou divisée par 10, 100... Dans la conclusion de sa thèse, Jeanne Bolon propose, entre autres, ce thème comme perspective de recherche en didactique des mathématiques :

> Un autre domaine de recherche à ouvrir de nouveau serait celui des *rapports entre nombres, mesures de grandeurs, unités-étalons* dans l'esprit de ce que nous avions proposé dans notre suggestion 8. Ce domaine a fait l'objet de nombreux travaux dans la période 1960-1980 (Revuz, Colmez en particulier) dans un contexte où la logique de la déduction mathématique dominait l'approche psychologique. L'enseignement y a gagné l'indépendance entre système de nombres et mesures. Il y a probablement perdu l'approche algébrique entre mesure de grandeurs, unités-étalons et nombres.

c. Relation entre les unités et les sous-unités du système décimal

Troisième suggestion, proposer un travail pratique sur les conversions de mesure par changement d'unité. Ce travail n'est pas l'étude d'un tableau analogue à celui de la notation décimale. Au contraire, l'objectif est d'aider les élèves à acquérir quelques repères physiques sur les grandeurs usuelles afin de pouvoir contrôler les valeurs qu'ils annoncent comme résultats dans les résolutions de problèmes. L'auteur propose des travaux pratiques où des longueurs, des masses et des volumes sont mesurées et fabriquées. Par exemple, en atelier « technologie », les élèves fabriquent plusieurs exemplaires de sacs de sable de 1 g, 1dag, 1 hg, 1 kg. Ils pourront vérifier, à l'aide d'une balance, que 10 sacs de 1 hg sont équivalents à un sac de 1 kg.

L'ambition de l'auteur nous semble clairement affirmée. Les élèves connaissent des notations décimales utilisées socialement, mais, contrairement à ce que préconisaient les programmes de 1945, il ne s'agit pas d'introduire la notion de nombre décimal là où elle n'est pas indispensable ni, a fortiori de réduire l'enseignement des décimaux à une notation pratique couramment utilisée. Il s'agit au contraire de manipuler les grandeurs, de les mesurer avec différents systèmes de mesure et de les composer dans des situations afin que les élèves puissent résoudre les problèmes où elles interviennent.

Conclusions sur enseignement des décimaux

Les nombres décimaux peuvent être présentés à l'école primaire de différentes façons mais, quelle qu'en soit l'introduction, plusieurs approches de ces nombres doivent être abordées. Une approche algébrique : les décimaux servent à résoudre des équations sans solution dans l'ensemble des entiers et des problèmes numériques que ces équations modélisent. Une approche technique : l'écriture décimale permet d'effectuer les calculs et les comparaisons plus facilement que l'écriture fractionnaire. Et une approche plus topologique : les décimaux sont de meilleurs outils que les entiers pour la mesure, ils permettent, comme les rationnels, une approximation aussi précise qu'on le souhaite de la mesure d'une grandeur ou de la position d'un point sur une droite graduée.

Pour que les élèves attribuent aux décimaux un statut complet de nombre, il faut qu'ils en aient les fonctions : exprimer la mesure d'une grandeur ou repérer un point de la droite, exprimer une transformation de la mesure d'une grandeur ou de la position d'un point, comparer les mesures de la même grandeur, exprimer la composition de deux grandeurs et, enfin, exprimer la composition de deux transformations.