Terminale S
Exemples d'exercices comportant une restitution organisée de connaissances

À partir de la session 2005, pour l'épreuve écrite de mathématiques du baccalauréat S, sera mise en œuvre complètement la note de service N°2003-070 du 29-4-2003, en particulier la phrase suivante :

« La restitution organisée de connaissances (comme par exemple la rédaction d'une démonstration figurant au programme), l'application directe de résultats ou de méthodes, l'étude d'une situation conduisant à choisir un modèle simple, à émettre une conjecture, à expérimenter, la formulation d'un raisonnement sont des trames possibles. »,

dont l'application avait été suspendue pour la session 2004.

En raison de la nouveauté de l'introduction de la « restitution organisée de connaissances », l'inspection générale de mathématiques a sélectionné un certain nombre d'exercices comprenant des questions rédigées dans cet esprit. Ces exercices peuvent servir d'exemples de ce qui pourrait apparaître dans un sujet de baccalauréat.

Exercice R 1 (enseignement obligatoire)

1. **Démonstration de cours.** Démontrer que, pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leqslant k < n$, on a :
$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$
2. En déduire que pour tous entiers naturels n et k tels que $2 \leqslant k < n-1$, on a :
$$\binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n}{k}.$$
3. On considère deux entiers naturels n et k tels que $2 \leqslant k < n-1$. On dispose d'une urne contenant n boules indiscernables au toucher. Deux des boules sont rouges, les autres sont blanches.

   On tire au hasard et simultanément k boules de l'urne. On appelle A l'événement « au moins une boule rouge a été tirée ».

   (a) Exprimer en fonction de n et de k la probabilité de l'événement $\overline{A}$, contraire de A. En déduire la probabilité de A.

   (b) Exprimer d'une autre manière la probabilité de l'événement A et montrer, à l'aide la formule obtenue à la question 2, que l'on retrouve le même résultat.

Exercice R 2 (enseignement obligatoire)

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et un nombre réel a appartenant à I.

1. Rappeler la définition de « f est dérivable en a ».
2. Dans chacun des cas suivants, indiquer si les deux propriétés citées peuvent être vérifiées simultanément ou non. Si la réponse est « oui », donner un exemple (un graphique sera accepté) ; dans le cas contraire, justifier la réponse.
   - f est continue en a et f est dérivable en a ;
   - f est continue en a et f n'est pas dérivable en a ;
   - f n'est pas continue en a et f est dérivable en a ;
   - f n'est pas continue en a et f n'est pas dérivable en a.

Exercice R 3 (enseignement obligatoire)

Soit (u_n) une suite. On considère les propriétés suivantes :

- P_1 la suite (u_n) est majorée ;
- P_2 la suite (u_n) n'est pas majorée ;
- P_3 la suite (u_n) converge ;
- P_4 la suite (u_n) tend vers $+\infty$;
- P_5 la suite (u_n) est croissante.

1. Donner la traduction mathématique des propriétés P_1 et P_4.
2. Si les propriétés P_1 et P_5 sont vraies, que peut-on en conclure pour (u_n) (on ne demande pas de justifier la réponse) ?
3. Si les propriétés P_2 et P_5 sont vraies, que peut-on en conclure pour (u_n) (on ne demande pas de justifier la réponse) ?
4. Une suite vérifiant la propriété P_4 vérifie-t-elle nécessairement la propriété P_2 (on demande de justifier la réponse) ?
5. Une suite vérifiant la propriété P_2 vérifie-t-elle nécessairement la propriété P_4 (on demande de justifier la réponse) ?

Exercice R 4 (enseignement obligatoire)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On rappelle que pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul, d'affixe z, on a : $|z| = \| \overrightarrow{w} \|$ et $\arg(z) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$, défini à $2k\pi$ près.

Dans cet exercice, *on prend comme prérequis* le résultat suivant :

Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls alors $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ (à $2k\pi$ près).

1. Soit z et z' sont deux nombres complexes non nuls, **démontrer que** $\arg \dfrac{z}{z'} = \arg(z) - \arg(z')$ (à $2k\pi$ près).

On note A et B les points d'affixes respectives $2i$ et -1.

À tout nombre complexe z, distinct de $2i$, on associe le nombre complexe

$Z = \dfrac{z+1}{z-2i}$.

2. Donner une interprétation géométrique de l'argument de Z dans le cas où $z \neq -1$.
3. Déterminer et représenter graphiquement, en utilisant la question précédente, les ensembles de points suivants :
   (a) L'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre réel négatif.
   (b) L'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre imaginaire pur.

Exercice R 5 (spécialité)

On considère un triangle OA_0B_0 rectangle isocèle en O et tel que la distance A_0B_0 soit égale à $4\sqrt{2}$. On précise de plus que l'angle $(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OB_0})$ est un angle droit direct.

On définit alors pour tout entier naturel n les points A_{n+1} et B_{n+1} de la façon suivante :
– A_{n+1} est le milieu du segment $[A_nB_n]$;
– B_{n+1} est le symétrique du point A_{n+1} par rapport à la droite (OB_n).

1. Représenter le triangle OA_0B_0, puis construire les points A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3.
2. (a) **Démonstration de cours.** Démontrer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme A_0 en A_1 et B_0 en B_1.
   (b) Soit s cette similitude : préciser son angle et son rapport, puis vérifier que son centre est O. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la similitude s transforme A_n en A_{n+1} et B_n en B_{n+1}.
3. (a) Démontrer que les points O, A_n et A_p sont alignés si et seulement si les entiers n et p sont congrus modulo 4.
   (b) On désigne par Ω le point d'intersection des droites (A_0B_4) et (B_0A_4). Démontrer que le triangle $A_0\Omega B_0$ est isocèle en Ω.
   (c) Calculer la distance A_0B_4.
   (d) Démontrer que $\Omega A_0 = 4\Omega B_4$.
   (e) En déduire l'aire du triangle $A_0\Omega B_0$.

Exercice R 6 (enseignement obligatoire)

Prérequis : la fonction exponentielle, notée exp, a les trois propriétés suivantes :

1. exp est une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$;
2. sa fonction dérivée, notée $\exp'$, est telle que, pour tout nombre réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$;
3. $\exp(0) = 1$.

En n'utilisant que ces trois propriétés de la fonction exp, **démontrer** successivement que :

– Pour tout nombre réel x, $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$;
– pour tout nombre réel a et tout nombre réel b, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Exercice R 7 (enseignement obligatoire)

Partie A Démonstration de cours.

Soit (u_n) une suite croissante non majorée.

1. Soit M un nombre réel et n_0 un entier naturel tel que $u_{n_0} \geqslant M$.
   Démontrer que pour tout entier naturel n, si $n \geqslant n_0$ alors $u_n \geqslant M$.
2. Quelles conséquences peut-on en tirer pour la suite (u_n) ?
3. Énoncer le théorème du cours ainsi démontré.

Partie B

Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes en justifiant chaque réponse :

a. Si une suite n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.
b. Si une suite est croissante alors elle tend vers $+\infty$.
c. Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée.
d. Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle est croissante.

Exercice R 8 (enseignement obligatoire)

Partie I

À chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affectés ; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affectés.
Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Pour chacune des affirmations suivantes répondre sans justification par Vrai ou Faux :

(A) Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs strictement positives. Si, pour tout entier n, $v_n \geqslant u_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n^2}{u_n} = +\infty$.

(B) Toute suite bornée est convergente.

(C) Pour toutes suites (u_n) et (v_n) à valeurs strictement positives qui tendent vers $+\infty$, la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$ converge vers 1.

(D) Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Partie II

Pour chacune des propositions de la première partie, justifier votre réponse :

– dans le cas où la proposition vous paraît fausse : en donnant un contre-exemple.
– dans le cas où la proposition vous paraît exacte : en donnant une démonstration.

Exercice R 9 (enseignement obligatoire)

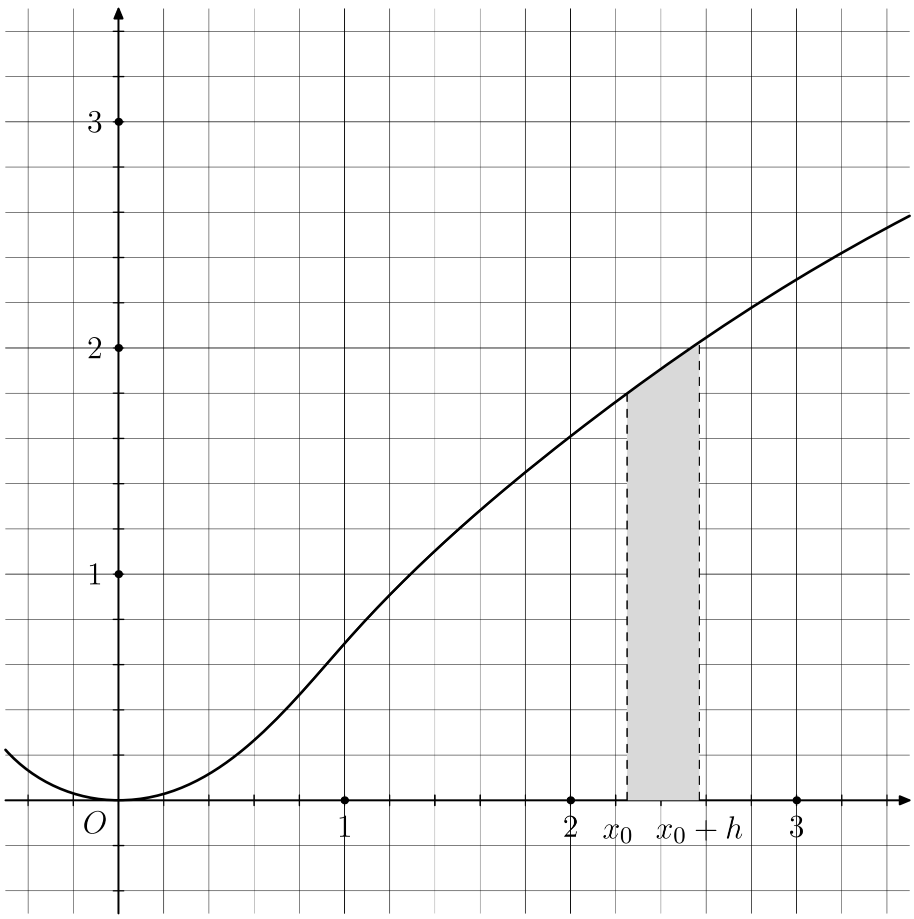
Le but de l'exercice est d'établir dans un cas particulier le lien existant entre aire sous la courbe et primitive. On prendra comme prérequis la définition suivante :

Définition : H est une primitive de h sur $[a, b]$ si et seulement si H est dérivable sur $[a, b]$ et si pour tout x de $[a, b]$ on a $H'(x) = h(x)$.

Dans la suite on note f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = \ln(t^2 + 1)$.

1. Expliquer pourquoi f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que f est croissante sur $[0, +\infty[$.

La fonction f est représentée ci-dessous :



Pour $\alpha \geqslant 0$, on note $A(\alpha)$ l'aire de la portion de plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et la droite d'équation $x = \alpha$.

3. (a) Soit x_0 et h des réels strictement positifs. En utilisant un rectangle convenablement choisi, établir l'encadrement :

$$\ln\left(1 + x_0^2\right) \leqslant \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \leqslant \ln\left(1 + (x_0 + h)^2\right).$$

   (b) Quel encadrement peut on obtenir de la même manière pour $h < 0$ et $h \geqslant -x_0$?

   (c) **Démontrer** que A est dérivable en x_0. Quel est le nombre dérivé de A en x_0 ?

4. Expliquer pourquoi $\ln(2) \leqslant A(2) \leqslant 2\ln(5)$.

Exercice R 10 (spécialité)

1. **Démonstration de cours.**
   Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
2. Soit p un nombre premier strictement plus grand que 2. Démontrer que p est congru à 1 ou à -1 modulo 4. Donner deux exemples de chacun de ces cas.

Le but de ce qui suit est de répondre à la question suivante : « Les nombres premiers p congrus à -1 *modulo 4 sont-ils en nombre fini ? »*

Supposons que ce soit le cas : soit n le nombre des nombres premiers congrus à -1 modulo 4, notons $A = p_1 p_2 \cdots p_n$ le produit de ces nombres et $B = 4A - 1$.

3. Montrer que B est congru à -1 modulo 4.
4. Soit q un diviseur premier de B. Montrer que q est distinct de chacun des nombres p_1, p_2,. . ., p_n précédents.
   Montrer que parmi les diviseurs premiers de B, l'un au moins est congru à -1 modulo 4.
5. Quelle réponse apporter à la question posée ?

Exercice R 11 (enseignement obligatoire)

Dans une pièce à température constante de 20 °C, à l'instant initial noté 0 la température $\theta(0)$ d'un liquide est égale à 70 °C.

Cinq minutes plus tard, elle est de 60 °C.

On admet que la température θ du liquide est une fonction dérivable du temps t, exprimé en minutes, et que $\theta'(t)$ est proportionnel à la différence entre la température $\theta(t)$ et celle de la pièce. On notera a le coefficient de proportionnalité, $a \in \mathbf{R}$.

1. **Démonstration de cours.**
   Soit (E) l'équation différentielle $z' = az$.
   Prérequis : la fonction $x \mapsto e^{ax}$ est solution de l'équation (E).
   Démontrer que toute solution de (E) est de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle.
2. Résoudre l'équation différentielle : $y' = ay - 20a$.
3. Quelle sera la température du liquide 30 minutes après l'instant initial ?

Exercice R 12 (enseignement obligatoire)

Soit E_1 l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = y$.

Soit E_2 l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle $y'' = y$.

Le but de l'exercice est de démontrer qu'il existe une unique fonction f qui appartient à E_2, et qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

1. Vérifier que les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont des éléments de E_2.
2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$, on pose $u = f + f'$.

(a) Démontrer que f appartient à E_2 si et seulement si u appartient à E_1.

(b) **Démonstration de cours.**
Prérequis : la fonction $x \mapsto e^x$ est solution de E_1.
Démontrer l'unicité de la fonction u élément de E_1 qui vérifie $u(0) = 1$.

3. Soit f un élément de E_2. On pose, pour tout réel x, $g(x) = f(x)e^x$.
   (a) Démontrer que si f vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, alors $g'(x) = e^{2x}$.
   (b) Démontrer qu'il existe une seule fonction f répondant au problème posé et déterminer son expression.

Exercice R 13 (enseignement obligatoire)

1. Le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$.
   (a) Soient u, v, w, x_0, y_0 des nombres réels tels que $u^2 + v^2 \neq 0$.
   Établir une formule donnant la distance du point M_0 de coordonnées (x_0, y_0) à la droite d'équation $ux + vy + w = 0$.
   (b) Soient a et b des réels strictement positifs, on considère les points $A(a, 0)$ et $B(0, b)$. Calculer la distance du point O à la droite AB.
2. Soient a, b, c des réels strictement positifs.
   Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ et $C(0, 0, c)$.
   (a) Calculer la distance du point C à la droite AB.
   (b) Montrer la relation
   $$\text{Aire}(ABC)^2 = \text{Aire}(OAB)^2 + \text{Aire}(OBC)^2 + \text{Aire}(OCA)^2.$$

Exercice R 14 (enseignement obligatoire)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

On prend comme prérequis :
« Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z, $|z| = \| \vec{w} \|$ et $\arg(z) = (\vec{u}, \vec{w})$, défini à $2k\pi$ près ».

1. Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.
   (a) **Démontrer** que $\arg(\dfrac{p-m}{n-m}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$ (à $2k\pi$ près).
   (b) Interpréter géométriquement $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$.
2. En déduire la traduction complexe d'une rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle de mesure θ , θ désignant un nombre réel.

Exercice R 15 (enseignement obligatoire)

1. On considère la fonction numérique f définie sur $[1;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ du plan.
Pour tout réel $\alpha \geqslant 1$, on considère les intégrales

$$J(\alpha)=\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x \qquad \text{et} \qquad K(\alpha)=\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\,x$$

Le but de l'exercice est d'étudier, sans chercher à la calculer, l'intégrale $K(\alpha)$.

   (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
   (b) Étudier le sens de variation de f .
   (c) Donner l'allure de la courbe C.

2. (a) Interpréter géométriquement le nombre $K(\alpha)$.
   (b) Soit $\alpha \geqslant 1$, montrer que

$$\frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)\leqslant K(\alpha)\leqslant \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

   (c) En déduire que

$$\frac{1}{2}\leqslant K(\alpha)\leqslant e$$

3. (a) Calculer $J(\alpha)$.
   (b) Démontrer que pour tout réel $\alpha \geqslant 1$

$$\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)\ln(2)\leqslant K(\alpha)\leqslant \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)\ln(2)$$

4. **Démonstration de cours.**
   Prérequis : Définition de la limite d'une fonction en $+\infty$.
   Démontrer le théorème suivant :
   Soient u, v et w des fonctions définies sur $[1,+\infty[$ telles que pour tout réel $x \geqslant 1$, $u(x)\leqslant v(x)\leqslant w(x)$.
   S'il existe un réel ℓ tel que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} u(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} w(x)=\ell$ alors $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} v(x)=\ell$.

5. Déduire de ce qui précède la limite de $K(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

Exercice R 16 (spécialité)

On considère les dix caractères A, B, C, D, E, F, G, H, I et J auxquels on associe dans l'ordre les nombres entiers de 1 à 10. On note $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$.

Définition de la congruence modulo 11 : On rappelle que si a et b désignent deux entiers relatifs, on dit que a est congru à b modulo 11, et on écrit $a \equiv b[11]$, si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 11k$.

1. (a) **Démonstration de cours.**
   Prérequis : Définition de la congruence modulo 11.
   Démontrer que si $a \equiv b[11]$ et $c \equiv d[11]$ alors $ac \equiv bd[11]$.
   (b) En déduire que si $a \equiv b[11]$, alors pour tout n entier naturel on a : $a^n \equiv b^n[11]$.
2. On désigne par f la fonction définie sur Ω par « $f(n)$ est le reste de la division euclidienne de 5^n par 11 ».
   On désire coder à l'aide de f le message « BACF ».
   Compléter la grille de chiffrement ci-dessous :

Lettre	B	A	C	F
n	2	1	3	6
$f(n)$	3			
lettre	C			

   Peut-on déchiffrer le message codé sans ambiguïté ?
3. On désigne par g la fonction définie sur Ω par « $g(n)$ est le reste de la division euclidienne de 2^n par 11 ». Établir, sur le modèle précédent, la grille de chiffrement de g. Permet-elle le déchiffrement sans ambiguïté de tout message codé à l'aide de g ?
4. Le but de cette question est de déterminer des conditions sur l'entier a compris entre 1 et 10 pour que la fonction h définie sur E par « $h(n)$ est le reste de la division euclidienne de a^n par 11 » permette de chiffrer et déchiffrer correctement un message de 10 caractères.
   Soit i un élément de Ω.
   (a) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que si, pour tout $i \in \Omega$, $i < 10$, a^i n'est pas congru à 1 modulo 11, alors la fonction h permet le déchiffrement sans ambiguïté de tous messages.
   (b) Montrer que s'il existe $i \in \Omega$, $i < 10$, tel que $a^i \equiv 1[11]$, alors la fonction h ne permet pas de déchiffrer un message avec certitude.
   (c) On suppose que i est le plus petit entier naturel tel que $1 \leqslant i \leqslant 10$ vérifiant $a^i \equiv 1[11]$. En utilisant la division euclidienne de 10 par i, prouver que i est un diviseur de 10.
   (d) Quelle condition doit vérifier le nombre a pour permettre le chiffrage et déchiffrage sans ambiguïté de tous messages à l'aide de la fonction h ? Faire la liste de ces nombres.

Exercice R 17 (enseignement obligatoire)

1. **Démonstration de cours.**
   Prérequis : Définition d'une suite tendant vers $+\infty$.
   « Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ».
   Démontrer le théorème suivant :
   Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et la relation $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.
   (a) Établir que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Démontrer que si la suite (u_n) a pour limite un réel ℓ, alors ℓ vérifie la relation $\ell = \ell + e^{-\ell}$.
   (c) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).