INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

30
AVRIL 1997

CAHIER DE DIDIREM

DEA DE DIDACTIQUE DES DISCIPLINES DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

LE TABLEAU NOIR : UN OUTIL POUR LA CLASSE DE MATHEMATIQUES

Par E. RODITI
JUIN 96

DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

UNIVERSITE PARIS 7 - DENIS DIDEROT

TITRE :

DEA de didactique des disciplines. Didactique des mathématiques
Le tableau noir : un outil pour la classe de mathématiques

AUTEUR :

Roditi Eric

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la
publication : M. ARTIGUE
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : 1997
ISBN : 2-86612-129-5

UNIVERSITÉ PARIS VII

DEA de DIDACTIQUE DES DISCIPLINES

Didactique des mathématiques

Le tableau noir : un outil pour la classe de mathématiques

Juin 1996

Éric Roditi

sous la direction d'Aline Robert, professeur à l'IUFM de Versailles

SOMMAIRE

I. DE LA FORMATION À LA DIDACTIQUE PROFESSIONNELLE

1. Motivations générales : une préoccupation initiale de formateur

Les conseillers[1] pédagogiques et les formateurs constatent une double difficulté initiale des professeurs stagiaires : la prise en compte réelle des élèves et la gestion du temps.[2] Généralement, ces difficultés diminuent et sont pratiquement résolues l'année suivante ; les stagiaires attribuent ce phénomène à la pratique (l'expérience) et à l'aide des conseillers pédagogiques. La classe « tourne ». Mais la question de la teneur l'apprentissage des élèves n'est pratiquement jamais abordée sur le terrain.[3] Les conseils donnés aux stagiaires sont souvent très contextualisés, le problème de la construction de savoirs professionnels adaptables suivant les classes n'est pas abordé sur le terrain. Mon expérience dans les deux domaines de la formation à l'IUFM et du tutorat sur le terrain me conduit reposer cette question de la formation à la prise en compte des élèves dans l'activité mathématique de l'enseignant. L'étudiant fait des mathématiques pour lui-même (activité personnelle) alors que l'enseignant en fait avec et pour les élèves (activité partagée). Comment les stagiaires apprennent-ils à tenir compte des élèves ? Comment les conseillers pédagogiques le leur enseignent-ils ? Peut-on enrichir la formation pour intégrer, entre autres, la question de l'apprentissage des élèves ?

Mais avant de poser la question de la formation, il faut poser celle de nos connaissances ; comment un enseignant tient-il compte des élèves ? La façon de tenir compte des élèves est-elle multiple ? Alors on peut poser la question de la formation. Peut-elle être modifiée ? Comment ? Les professeurs stagiaires nous posent, à leur manière, la question de nos connaissances. Ils accordent souvent moins de crédit aux formateurs de l'IUFM qu'aux professeurs en exercice dans leurs classes car ils n'arrivent pas à utiliser les contenus de formation dans le contexte de leur activité professionnelle et ce sont précisément des réponses aux questions issues de leur

---

[1]Le masculin est utilisé dans ce texte, sans signaler le féminin entre parenthèse à chaque fois que le cas le justifie, afin de ne pas alourdir la forme mais, de façon générale, les mots relatifs aux personnes désignent aussi bien les hommes que les femmes.

[2]ROBERT A. (1996), *Une approche de la formation professionnelle initiale des futurs enseignants de lycée et collège en mathématiques : un essai de didactique professionnelle.* Cahier DIDIREM n°26, IREM de PARIS VII.

[3]AUDOIN M.C. (1996), *Formation professionnelle initiale en mathématiques : tuteurs et stagiaires en collège et lycée.* Document de travail pour la formation des enseignants n°16, IREM de PARIS VII.

pratique qu'ils recherchent. Nous avons, en formation, besoin d'acquérir des connaissances : des connaissances sur les pratiques, sur les connaissances issues de l'action ou connaissances de l'action[4].

C'est donc du côté des pratiques des enseignants que je suis allé chercher…

Madame Aline Robert, professeur d'université à l'IUFM de Versailles, est responsable d'une équipe de recherche qui travaille sur un projet proposé à cet IUFM et qui porte sur les pratiques de l'enseignant de mathématiques en classe de seconde. Elle m'a proposé de rejoindre cette équipe afin d'y mener cette recherche et elle a accepté de diriger ce mémoire ; je l'en remercie sincèrement.

2. Le choix du tableau noir

Je suis allé à l'IUFM de Paris consulter les mémoires professionnels des professeurs stagiaires – PLC2 – afin de trouver les questions sur les pratiques de classe qui y sont le plus souvent posées. Elles portent sur la discipline, sur les activités en petits groupes ou sur l'utilisation du rétroprojecteur.

J'ai retenu l'idée de travailler sur l'utilisation d'un outil pour la classe. Afin de limiter les difficultés techniques de la recherche et compte tenu des possibilités que me permettait le travail au sein de l'équipe animée par Madame Aline Robert, je souhaitais travailler sur une pratique répandue dans l'enseignement des mathématiques et ainsi éviter les séances d'enseignement médiatisé par un outil technologique (rétroprojecteur, projecteur de diapositives, lecteur vidéo, ordinateur…). Le tableau noir m'est apparu comme étant certainement l'outil pédagogique le plus généralement utilisé en cours de mathématiques.

L'étudiant fait des mathématiques ; le plus souvent, il écrit sur une feuille de papier ou à l'aide de son ordinateur. Il utilise éventuellement un tableau au cours de ses recherches, il « passe au tableau » soit sous le contrôle du professeur soit à l'oral d'un concours ou d'un examen. Le professeur, lui aussi, écrit au tableau mais il le fait en classe dans un contexte et dans un but pédagogique. Voilà bien une différence importante entre l'étudiant et l'enseignant. Les professeurs stagiaires doivent apprendre à utiliser et à gérer le tableau ; les professeurs ont une pratique du tableau noir. Quelle est-elle ? Quels travaux sur ce sujet ont déjà été réalisés ?

---

[4]TOCHON F. V. (1993) *L'enseignant expert*, Nathan, Paris

Après quelques recherches bibliographiques, nous avons constaté que ce sujet n'avait pas encore été abordé sauf, sous forme de prescriptions, par des Inspecteurs de l'Éducation Nationale. Nous avons décidé de tenter une recherche sur l'utilisation du tableau en classe de mathématiques et de participer ainsi à celles que mène le groupe dirigé par Madame Aline Robert sur les pratiques des professeurs.

3. Quelles questions sur le tableau noir ?

Les chercheurs en didactique des mathématiques et en didactique professionnelle se posent actuellement des questions sur les pratiques. Ils distinguent les pratiques des compétences, les premières sont des actes que le professionnel peut décrire (pour un professeur, ce qu'il fait, ce qu'il dit) alors que les secondes sont des connaissances mobilisables et mobilisées dans l'action. C'est dans cette démarche que s'inscrit notre questionnement de chercheur à propos de l'utilisation du tableau. Nous nous interrogeons à la fois sur les pratiques et sur les compétences des professeurs à ce sujet, sur les moyens de les identifier, sur les moyens de les décrire et, à terme, sur des moyens de les transmettre.

31. Une pratique professionnelle : premières réflexions sur le rôle du tableau par le professeur de mathématiques

Nous avons commencé à aborder le problème par quelques observations et des entretiens avec quelques professeurs de mathématiques. Nous leur avons demandé comment ils utilisaient le tableau et ce qui, pour eux, était important. Nous avons dégagé trois pôles :

a. Le tableau, un moyen de communication.

Pour communiquer avec une partie des élèves de la classe ou avec la totalité, le professeur peut utiliser le discours oral ou écrit, il communique aussi de façon non verbale : hochement de tête ou autres gestes, sourire ou grimace, silence… Le mode de communication écrit dont le tableau fait partie, permet, contrairement aux autres, la persistance du message émis, notamment s'il reste écrit. Alors, ce message peut être lu plusieurs fois de façons différentes.

b. Un tableau pour exposer des mathématiques en classe.

Le professeur peut soulager la mémoire des élèves en triant ce qui est important, ce que la linéarité de l'énonciation par rapport au temps d'un message oral rend difficile voire impossible. Il peut organiser et réorganiser les parties du message. Enfin il peut accompagner chaque relecture totale ou partielle d'un commentaire oral, on dit généralement que le professeur « montre » quelque chose aux élèves.

c) Un tableau pour faire des mathématiques.

Pour faire des mathématiques, on a souvent besoin d'écrire, des dessiner des graphiques ou des schémas. Le tableau est un moyen qui permet l'activité mathématique et qui, en même temps, permet que cette activité soit observable. Le professeur peut faire des mathématiques au tableau ou y envoyer un élève pour en faire. Cette activité peut être personnelle ou partagée comme on le remarque aisément en observant les élèves au tableau : contrairement aux professeurs, ils ont une activité personnelle, ils sont souvent muets, ils ne permettent pas aux autres de suivre ce qu'ils font… Avoir une activité mathématique au tableau s'apprend-il ?

Les questions que nous nous posons sur les connaissances pratiques des professeurs de mathématiques à propos du tableau, étant entendu que ces connaissances ne nous semblent pas a priori communes à tous les enseignants mais bien propres à chacun d'entre eux, portent sur quatre grands thèmes :

– comment l'enseignant écrit au tableau, efface… ;

– ce que l'enseignant écrit ou dessine au tableau ainsi que ce qu'il y montre ;

– comment l'enseignant présente le tableau (encadrements, couleur…) ;

– comment l'utilisation du tableau est inscrite dans le scénario d'une séance et comment le tableau est géré en classe.

Dans ce travail, nous cherchons à aborder ces questions, y compris celle de la méthodologie, pour atteindre nos objectifs (mettre en évidence des savoir-faire techniques mais aussi leurs conditions de mise en pratique dans l'action) quitte à revenir en fin de travail sur ce premier découpage en quatre thèmes.

32. Comment aborder ces pratiques ?

Il nous a semblé que ce qu'on cherche à mettre en évidence dépend d'un quadruplet composé d'un professeur, d'un contenu d'enseignement, d'une classe d'élèves dans un établissement, de certaines conditions de lieu et de temps. L'introduction parmi les variables considérées des conditions de lieu et de temps rend compte des adaptations de l'enseignant aux contraintes matérielles que représente le travail dans une salle exiguë ou à une heure difficile de la journée comme celle qui suit le déjeuner. Ces contraintes déterminent beaucoup, d'après les enseignants eux-mêmes, leurs choix pédagogiques. Nous considérons qu'une séance d'enseignement est une histoire qui émerge de l'interaction de ces quatre facteurs.

Mais comment décrire une pratique sans aucune référence ? Notre choix est de comparer plusieurs séances. Ainsi, pour accéder à certaines pratiques relatives au tableau, notre premier choix méthodologique a été de fixer trois des quatre facteurs du quadruplet puis de travailler à partir des régularités et des changements observés. Restait à choisir la variable…

Analyser les pratiques des enseignants en faisant varier le pôle professeur revient à comparer des professeurs. Cette analyse présente deux types de difficultés. Si le nombre d'enseignants est important, la recherche demande beaucoup de temps et de moyens pour effectuer les expériences d'observations et pour récolter les données comme on peut s'en rendre compte à la lecture de l'étude de la DEP[5]sur les pratiques des enseignants de CE2. Si l'étude se limite à deux enseignants, on ne peut pas ignorer le fait que les classes aussi sont différentes, C.M. CHIOCCA, E. JOSSE et A. ROBERT[6]ont rencontré cette difficulté dans leur recherche sur le discours des enseignants : la variation du pôle professeur entraîne celle du pôle élèves, une classe a généralement un seul professeur de mathématiques…

Faire varier le pôle mathématique nous oriente vers l'étude, pour un professeur donné, de l'utilisation du tableau au cours de séances portant sur différents thèmes mathématiques contenus dans les programmes d'un même niveau de classe. On peut alors observer un professeur qui traite plusieurs thèmes différents avec une même classe. Des contraintes matérielles nous ont empêché d'aborder cette approche qui pourtant aurait son intérêt, elle permettrait de différencier les techniques qui sont utilisées par un professeur de façon indépendante des notions, qui pourraient caractériser le couple professeur / classe et celles qui dépendent aussi de la notion mathématique étudiée.

---

[5]ALTET M., BRESSOUX P., BRU M., LAMBERT C. (1994) *Une étude exploratoire des pratiques d'enseignement en classe de CE2*, Les dossiers d'éducation et formations n°44, Ministère de l'Éducation nationale Direction de l'Évaluation et de la Prospective.

Faire varier le pôle élève en fixant le pôle du savoir et le pôle de l'enseignant revient à comparer l'utilisation du tableau par un même professeur dans deux des ses classes durant l'enseignement de la même notion. C'est ce type d'étude que nous avons choisi de mener, nous proposons une étude comparée de l'utilisation du tableau noir par un même professeur pendant deux séances portant sur le même contenu mais avec deux classes de même section mais de niveau scolaire différent.

4. Méthodologie générale

Parmi les professeurs volontaires pour être observés et ainsi contribuer à la recherche proposée à l'IUFM de Versailles, j'ai contacté un professeur chargé de deux classes de seconde générale, l'une est dite faible et l'autre est la meilleure du lycée afin de mener mes propres recherches et d'apporter une contribution à celles de l'équipe.

41. Deux entretiens et une vidéo

Nous avons fixé le thème qui serait traité dans les deux classes : fonctions numériques. Nous avons choisi un jour ou les deux classes ont cours de mathématiques. Nous avons convenu que chaque séance sera précédée et suivie d'un entretien. Le premier portera sur la classe et sur le déroulement prévu de la séance, le second sera l'occasion d'en faire un bilan. Ces deux entretiens seront enregistrés.

Nous avions, pour cette observation, besoin d'enregistrer à la fois le dit et l'écrit ; les notes prises du fond de la classe n'auraient donc pas donné de moyens suffisants. Le groupe de recherche animé par Aline Robert a demandé et obtenu la participation d'opérateurs vidéo professionnels. Nous leur avons proposé de filmer ces séances. Nous avons convenu avec eux que le film ne serait pas monté, qu'une caméra suivrait le professeur du fond de la classe et qu'une autre filmerait les élèves. Ces conditions correspondent à celles qui ont été fixées pour tous les films concernant la recherche du groupe à laquelle la notre est intégrée.

42. Transcription des bandes vidéo

Les bandes vidéo des séances et la bande audio des entretiens constituant les traces des expérimentations, il nous a fallu les transcrire afin de pouvoir travailler dessus : notre étude demande de s'attarder sur des moments de courtes durées et de mettre en relation différentes parties de la séance (on retrouve sur l'observation des

---

[6]CHIOCCA C.M., JOSSE E., ROBERT A. (1992) *Analyse du discours des enseignants*, Cahier de

bandes audio et vidéo les avantages de l'écrit que nous avons décrits à propos du tableau par rapport à l'oral). Il nous a aussi semblé indispensable de transcrire par écrit complètement la partie de chaque séance sur laquelle a porté notre étude et de citer les passages des entretiens que nous avons utilisés afin de permettre un accès complet et direct aux expériences et donc aussi de permettre la critique. Il nous a fallu mettre au point une méthode de transcription du son et de l'image qui réponde à notre objectif, nous la décrirons dans une première partie méthodologique. Ces transcriptions figurent en annexe de ce mémoire.

43. Observation et analyse des séances

Afin de décrire l'utilisation du tableau durant les deux séances, nous avons procédé à un découpage de la réalité complexe de la classe en retenant des variables pertinentes pour notre recherche. Puis nous avons effectué plusieurs types d'analyses appliquées à ce découpage :

– une analyse globale a priori qui permet de dégager ce que nous pouvions attendre de chaque séance sur le plan mathématique mais aussi sur le plan technique de l'animation de la classe,

– une analyse de la transcription de la bande vidéo servant à décomposer la séance qui s'est effectivement déroulée en parties et sous-parties propices à notre étude. Puis, localement, pour chaque partie ainsi définie,

– dans ce cadre, une analyse spécifique de l'utilisation du tableau, de son contenu, de sa fonction et de sa gestion,

– une analyse a posteriori globale de la classe, en fonction des mathématiques et de l'activité des élèves.

La description complète de cette méthode fera l'objet de la première partie de ce mémoire. Nous avons fait fonctionner cette méthode sur les deux séances filmées. Nous indiquerons dans la seconde partie les conditions des deux expériences et nous exposerons les résultats obtenus pour chacune d'elles. Dans la troisième partie nous synthétiserons les résultats obtenus sur les deux séances, nous en indiquerons la porté et les limites, y compris celles de la méthodologie adoptée. Nous ouvrirons aussi des perspectives de recherches complémentaires pour ce problème.

DIDIREM n° 16, Université Paris 7.

II. ÉLÉMENTS DE PROBLÉMATIQUE ET MÉTHODOLOGIE PARTICULIÈRE

Les chercheurs en didactique des mathématiques étudient les phénomènes de transmission et d'acquisition des connaissances dans le système d'enseignement en ce qu'ils ont de spécifique aux contenus d'enseignement. Certains d'entre eux, travaillent à la conception de scénarios. Ils font un bilan des acquis des élèves, des enjeux mathématiques de la notion étudiée, des objectifs déclarés de l'institution par rapport à cette notion puis des enseignements à partir d'observations, de manuels, d'articles d'enseignants… Ils utilisent leurs connaissances sur l'apprentissage, pour élaborer, en fonction des objectifs qu'ils ont défini à partir du bilan dressé, des scénarios pour la classe, ils testent ces scénarios et, éventuellement, ils les adaptent ou les modifient. Ils élaborent des ingénieries didactiques. Mais qu'en est-il de la réalisation effective par les enseignants de ces scénarios ?

Notre expérience en formation nous a permis de constater l'écart parfois important qu'il peut y avoir entre le scénario prévu et la séance effectivement réalisée. Nous ne souhaitons pas poser là le problème de la planification des enseignants et de l'apprentissage à la planification mais rappeler que la planification des enseignants expérimentés n'est pas organisée comme une suite linéaire d'objectifs et d'actions correspondantes

> *« Le risque d'une planification linéaire est de diminuer les apports de l'interaction et la capacité d'écoute de l'enseignant(e). (...) Les enseignants se soucient peu des détails susceptibles de modifications lors des interactions, mais tiennent à suivre une ligne de fond et à bien réguler les transitions entre les activités. (...) L'observation des activités de planification chez l'enseignant(e) montre qu'elles produisent une image mentale organisatrice de chaque unité d'enseignement et des réponses probables des apprenants. »*[7]

Dans cette étude nous nous intéressons aux pratiques des enseignants donc à l'animation, à la « mise en actes » du scénario du professeur. Ce scénario, comme celui des didacticiens, est le produit de connaissances mais sa mise en actes est soumise à la fois aux compétences techniques de l'enseignant et à son adaptation à la classe. Notre recherche porte donc non seulement sur la mise en évidence de savoir-faire techniques

---

[7]TOCHON F.V. op. cit.

mais aussi sur leurs conditions de mise en pratique dans l'action. Notre méthode de travail doit donc permettre cette double approche.

1. L'analyse a priori

Elle a pour objectif d'étudier le scénario et le contenu mathématique de la séance observée en tenant compte des choix de l'enseignant et de ses conceptions de l'enseignement en classe. Elle doit permettre de mettre en évidence la marge de manœuvre que l'enseignant se laisser pour fonctionner.

Nous devons, comme si nous voulions nous-mêmes élaborer un scénario, analyser les contenus mathématiques en jeu dans la séance prévue, faire le point sur ce qu'on sait des pratiques des élèves à ce niveau et situer l'ensemble dans le contexte d'enseignement actuel (programmes, manuels…). Nous avons en outre besoin, pour cette analyse, d'informations sur le projet du professeur et sur ses arguments par rapport aux mathématiques en jeu dans la séance et par rapport à la classe.

L'analyse a priori repose donc en partie sur des informations qui concernent l'enseignant. Le chercheur obtient de telles informations grâce à l'entretien préliminaire. Mais le projet réel du professeur correspond-il exactement à celui qu'il a explicité durant l'entretien ? Nous ne pouvons pas répondre à cette question pour deux raisons au moins, le professeur ne nous dit que ce qu'il veut (peut) nous dire, et l'entretien lui-même peut être une occasion pour le professeur de modifier son projet. Pour éviter l'influence de l'entretien sur le projet initial du professeur, nous nous sommes limités à trois questions avant la séance, des questions assez générales qui permettent à l'enseignant de parler facilement et qui ne mettent pas trop son projet en question : « Pouvez-vous décrire un peu la classe et le lycée ? Pouvez-vous nous dire le thème que vous allez traiter et quels sont les objectifs que vous souhaitez atteindre ? Pouvez-vous nous préciser les différentes parties de la séance et quelles activités vous avez prévu de donner aux élèves ? »

L'analyse a priori repose aussi sur l'entretien après la séance qui permet de savoir à quoi le professeur accorde de l'importance dans son enseignement. Dans cet entretien, il doit pouvoir exprimer ce qui lui semble être des réussites (objectifs atteints) de la séance ; ses descriptions et ses explications seront pour nous des éléments essentiels pour cerner ce qui n'a pas pu être exprimé du le scénario prévu. Nous avons posé deux questions : « Comment avez-vous ressenti cette séance ? Quels objectifs pensez-vous avoir atteint et quelles difficultés reste-t-il ? »

2. La transcription des bandes vidéo

La transcription des bandes vidéo répond à deux nécessités. Une nécessité pratique : on travaille mieux sur un support écrit que sur un support vidéo car, comme nous l'avons déjà remarqué, on peut facilement revenir en arrière, se fixer plus longuement sur un passage, organiser une relecture en triant les parties qui sont intéressantes, bref, éviter la linéarité temporelle du discours et de l'action grâce à l'écrit. Une nécessité « scientifique » a également motivé notre décision de transcrire les bandes vidéo : permettre la critique en donnant l'accès aux sources qui sont à la base de notre travail.

Une bande audio contient des images et du son, nous avons donc procédé en deux temps : transcription des dialogues puis transcription des images. La transcription de la partie orale n'a pas posé de problème méthodologique important, nous avons écrit ce qui est dit en respectant les hésitations, les phrases incomplètes… Pour rendre compte de l'activité dialoguée de la classe il a tout de même fallu ajouter quelques précisions :

– [P] indique ce qui est dit par le professeur ;
– [E] indique ce qui est dit par un élève ;
– [E=] indique que c'est le même élève que précédemment qui intervient ;
– le double soulignement indique deux propos énoncés simultanément ;
– les points de suspensions sont utilisés quand une phrase n'est pas terminée parce que la parole a été coupée mais ils seront mis entre parenthèses si le professeur ne finit pas sa phrase, marque un silence et attend la suite de la part d'un élève de la classe.

Les difficultés d'ordre méthodologique ont commencé avec la transcription des images. Nous avons choisi de transcrire seulement ce qui concerne notre étude, c'est-à-dire les gestes qui sont en rapport avec l'utilisation du tableau : les déplacements du professeur, les déplacements d'un élève, le fait que le professeur montre le tableau ou une partie du tableau, le fait que le professeur n'écrive pas dans l'ordre de la lecture…

Il a fallu inventer des repères chronologiques qui permettent de situer deux événements l'un par rapport à l'autre, ce repérage est fondamental pour notre sujet afin de différencier ce qui est dit après, pendant ou avant d'être d'écrit. Ce problème est lié à celui de la transcription des états successifs du tableau. Nous avions pensé dans un premier temps à séparer la transcription du tableau de celle des discours pour qu'ils puissent être consultés côte à côte et respecter ainsi la liberté que l'observateur a de regarder le tableau au moment où il le décide. Nous aurions pu, par un système de codage ou de calque rendre compte de l'évolution de l'état du tableau. Mais nous n'avons pas trouvé de moyens facilement lisibles qui rendent compte aussi de la chronologie précise des événements.

Nous avons finalement choisi de transcrire les états successifs du tableau en marquant en caractère gras ce qu'il y a de nouveau et en insérant chaque « photographie » du tableau à l'endroit du texte qui correspond exactement au moment où celui qui écrit au tableau a fini de dire ce qui correspond à ce qu'il a écrit. En soulignant ce qui est dit par un locuteur en même temps qu'il écrit au tableau, on a donné au lecteur le moyen de repérer exactement par rapport au discours, le moment où le locuteur commence à écrire et celui où il a terminé. Nous avons fait ce choix car il correspond le mieux à ce que vit l'observateur : il voit souvent l'état du tableau une fois que l'écriture est terminée alors qu'il entend sans discontinuité le discours du locuteur. Cette technique permet aussi de rendre compte, par plusieurs « photographies », de ce qui est écrit dans un ordre chronologique qui ne correspond pas à celui de la lecture une fois que tout est écrit. Nous avons transcrit en italique ce qui est dit, non pas en écrivant mais en montrant le tableau, et nous avons précisé entre parenthèses ce qui est montré au tableau.

Le seul défaut de cette technique, que nous ayons constaté, est que ce qui est dit après avoir écrit au tableau paraît coupé de ce qui est dit pendant l'écriture puisque la « photographie » du tableau se trouve placée entre ces deux restitutions écrites du discours.

Voici finalement les codes qui rendent compte des gestes, du tableau et du discours par rapport à l'écriture :

– entre parenthèses et en script sont indiquées des précisions gestuelles concernant celui qui parle.

– Le soulignement indique ce qui est dit en écrivant au tableau ;

– l'italique indique ce qui est dit en montrant quelque chose au tableau ;

– L'encadrement indique ce qui est écrit au tableau, la disposition générale étant globalement respectée, et, en gras, apparaît ce qui est nouveau quand c'est écrit dans le sens de la lecture, sinon plusieurs encadrements successifs indiquent l'ordre chronologique de l'écriture. Les inscriptions présentes au tableau ne sont pas à chaque fois répétées. Les « effaçages » sont signalés : même si les inscriptions ne sont pas toutes répétées, elles sont présentes.

Voici, sur fond grisé, un exemple extrait de la transcription : un élève propose une fonction, le professeur lui coupe la parole, écrit au tableau en parlant, pose une question, attend la réponse, les élèves répondent, le professeur reprend la réponse, écrit au tableau puis apporte un commentaire durant lequel il montre quelque chose au tableau.

– [E] Oui, f associe à x, $4x$…

– [P] Ah bah là ça va mieux. Ou alors tu dis la fonction f définie par l'image d'un réel quelconque f de x égal, et tu pourrais dire c'que t'as dit tout à l'heure.

<u>Alors ben tiens on va l'appeler *g* pour changer</u>

	<u>ex1</u> ***g* :**	

parce que sinon on est esclave de la notation hein, on a bien dit faut changer ! Alors à x on fait correspondre quoi déjà ? (…)

– [E ensemble] brouhaha…

– [P] <u>Ah c'est $4x + 7$ qui l'emporte alors</u>

	$x \in \mathrm{I}$ $x' \in \mathrm{I}$ si $x < x'$ alors $f(x) \leq f(x')$ <u>ex1</u> $g : \boldsymbol{x \longrightarrow 4x + 7}$	

Alors, *cette fonction elle est définie sur R et elle est croissante sur R ça c'est un souvenir de l'année dernière, bah on va le montrer* (il montre la définition de g).

Pour conclure sur la transcription des bandes vidéo nous nous devons d'ajouter que la méthode est coûteuse en temps. Il est vrai que cette expérience était pour nous la première et que nous n'avions pas d'équipement fonctionnel pour cette activité (magnétoscope ne prenant pas immédiatement en compte les ordres de retour ou d'arrêt, magnétoscope et ordinateur n'étant pas situés dans la même pièce). Le bilan est le suivant : pour obtenir la transcription située en annexe de ce mémoire qui correspond à deux fois un quart d'heure de bande, qui est complètement saisie par traitement de texte et qui compte une vingtaine de pages, il nous a fallu une quinzaine d'heures de travail !

3. Le découpage de chaque séance

Le professeur anime un projet mathématique pour les élèves de la classe. Il utilise le tableau pour écrire telle définition ou tel théorème à prendre en note, pour poser une question, pour donner une indication, ou encore pour illustrer ce qu'il dit… Il montre au tableau des résultats obtenus, une démarche de résolution… Il envoie aussi, sous sa responsabilité, des élèves au tableau pour répondre à une question, tracer une figure, écrire une solution… Suivant les activités proposées (exposé, correction d'exercices, recherches de résolution de problème…) l'utilisation du tableau par le professeur est différente, le contenu du tableau ainsi que sa fonction le sont aussi, ce que l'élève doit faire ce qui est inscrit au tableau l'est encore.

Mais on peut aussi poser la question autrement. Le professeur peut avoir une idée de ce qui doit apparaître ou ne doit pas apparaître au tableau en classe de mathématiques. Des inspecteurs ont rédigé des conseils portant sur les techniques de l'animation de la classe et en particulier sur l'utilisation du tableau noir. Ces inspecteurs n'ont pas différencié leurs conseils suivant les activités. La façon d'utiliser le tableau, ce qu'on doit y inscrire peuvent apparaître comme une constante qui influence le choix de l'activité proposée par l'enseignant.

Quand l'erreur était considérée comme un manque, comme un dysfonctionnement, on n'écrivait pas d'erreurs au tableau. Aujourd'hui, des professeurs proposent des activités durant lesquelles toutes les réponses des élèves, justes ou fausses, sont notées au tableau pour y être examinées. Pour fournir un support visuel à la classe dans la résolution d'un problème de géométrie, le professeur peut tracer ou faire tracer une représentation imprécise de la figure ; il peut, au contraire, construire ou faire construire, instruments à l'appui, un dessin précis de la figure du problème. Certains professeurs s'interdiront cette alternative pensant que seule la précision mérite de figurer au tableau, d'autres choisissent le dessin précis dans une classe d'élève en difficultés et le croquis dans une classe de meilleur niveau…

L'utilisation du tableau est donc liée, à chaque instant, à l'activité de la classe, à la notion mathématique étudiée, aux enjeux pédagogiques et aux objectifs du professeur. Nous faisons l'hypothèse que pour comparer l'utilisation du tableau dans les deux classes il nous faut retenir des moments semblables au sens que nous venons de préciser. Ainsi, nous avons dans un premier temps décomposé chaque séance en unités favorables à notre analyse, nous appellerons *épisodes* ces unités. Nous avons choisi de nommer épisode ce que des auteurs comme Marcel POSTIC qui travaillent sur l'observation de situations éducatives nomment séquence. Mais le mot séquence étant déjà employé en didactique des mathématiques nous a semblé être source de confusion. Nous entendons par épisode

> *un enchaînement d'actes pédagogiques et d'échanges entre l'enseignant et les élèves en vue de parvenir à un but donné. Chaque* épisode *possède son unité propre par le but spécifique qu'il veut atteindre et il est une étape dans la progression globale vers le ou les objectifs de l'activité pédagogique*[8].

Ainsi c'est l'unité de l'objectif du travail mathématique (l'élaboration d'une définition, la démonstration d'une propriété…) qui nous a permis de délimiter les épisodes. Un découpage complet des deux séances figure en annexe, chaque épisode est repéré par un titre comme « définition d'un intervalle symétrique », « l'exemple de R », « un exemple de fonction affine »…

Pour notre étude, nous avons ensuite décomposé ces enchaînements (les épisodes) en unités élémentaires par rapport à l'utilisation du tableau noir. Nous considérons en effet qu'une pratique recouvre ce qui est dit et fait dans la classe mais aussi les choix et les décisions explicitables par l'enseignant[9]. Le chercheur ne perçoit qu'une partie des pratiques, il cherche à remonter de l'observation à la pratique. Nous avons choisi de considérer pour notre étude chaque utilisation du tableau, chacune d'elle définit une unité élémentaire d'un épisode. Nous appellerons *scènes* ces unités élémentaires, nous avons délimité chaque scène pour que chacune d'elles comprenne au plus un acte pédagogique qui utilise le tableau. On repère assez facilement les scènes sur la transcription des bandes vidéo car, comme nous l'avons déjà indiqué, la méthode choisie pour présenter le tableau et son évolution fait apparaître chaque état du tableau,

[8] Marcel POSTIC et Jean-Marie DE KETELE (1988), *Observer des situations éducatives*, Paris, PUF.
[9] Aline Robert (1996), op. cit.

comme des photographies, dans un encadré au fur et à mesure du déroulement de la séance.

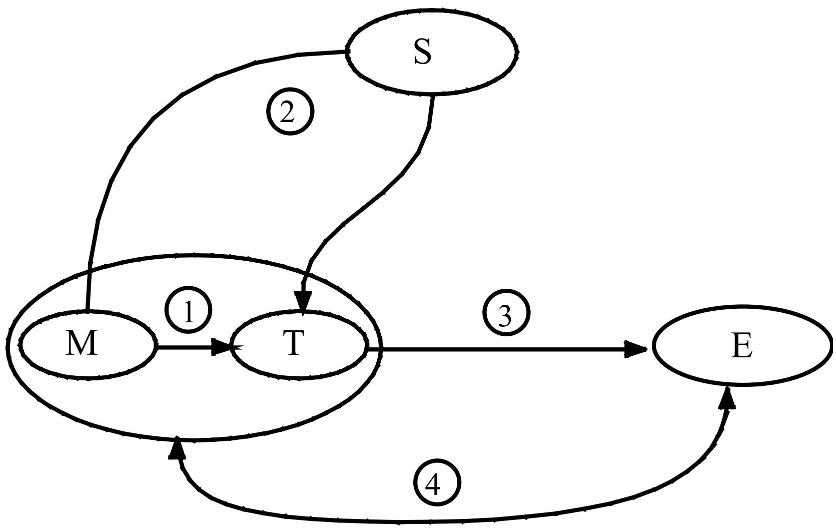
Afin d'indiquer les épisodes et les scènes, nous avons numéroté les pages de A à U et les lignes de la transcription des bandes vidéo et nous avons utilisé ces numéros comme référence dans le découpage situé en annexe.

4. Une analyse spécifique du tableau, analyse quantitative.

Comment l'enseignant utilise-t-il le tableau ? Quelles informations peut-on relever durant la séance qui permettent de nous renseigner sur cette question ? Quelles sont, parmi ces informations, celles qui sont pertinentes pour notre recherche ?

Notre premier travail a été de dresser une liste de toutes les informations concernant le tableau qu'on peut enregistrer durant une séance, ce qui correspond aux parties observables des pratiques. Puis il nous a fallu les organiser.
Pour analyser la classe en prenant en compte l'utilisation du tableau, nous avons considéré les trois pôles habituels et nous avons considéré de tableau comme un médiateur dans la relation professeur-élève-savoir.

Le schéma suivant illustre nos propos :



1. Le tableau instrument de l'enseignant.
2. Le contenu du tableau.
3. L'apparence du tableau.
4. L'inscription du tableau dans le scénario de la séance.

1. – Le tableau comme instrument du professeur. Cet intitulé regroupe les observations concernant, parmi les pratiques du professeur, les régularités qui sont le

produit de gestes effectués apparemment de façon automatique (organisation du tableau, taille de l'écriture, rythme de l'effaçage…).

2. – Le contenu du tableau. Les questions posées sous cette rubrique abordent ce que l'enseignant écrit ou dessine au tableau ainsi que ce qu'il y montre.

Nous distinguons plusieurs types de contenu, les contenus mathématiques comme une définition, une preuve, une figure… les contenus non mathématiques comme un titre, un cadre, le plan, un schéma, une mise en garde… À chaque inscription, nous attribuons une ou plusieurs fonctions.

Avant de définir les fonctions que nous avons retenues, remarquons qu'il peut être impossible de n'attribuer qu'une seule fonction à un écrit. Le tableau noir est un outil de communication, un outil pédagogique mais il est aussi un outil nécessaire aux gestes de l'activité mathématique. Le professeur propose à la classe une définition d'un objet mathématique ; en l'écrivant (comme en la disant), il définit cet objet mais il montre aussi comment, en mathématiques, on définit les objets. Le professeur propose à la classe une démonstration d'une propriété ; en l'écrivant, il démontre cette propriété mais il montre aussi comment, en mathématiques, on démontre des propriétés. Inversement, si le professeur rédige au tableau la démonstration d'une propriété, il montre en partie ce qu'il fait pour démontrer. Pour reprendre Yves Chevallard[10]

> *il faut bien voir que toute activité se réalise en même temps qu'elle se montre, aussi bien à celui qui la réalise qu'à d'autres qui peuvent l'observer.*

Lorsque plusieurs fonctions pouvaient être attribuées à une inscription, nous avons choisi de toutes les indiquer.

Les fonctions que nous avons retenues sont : étiqueter, organiser, soutenir la mémoire de la classe ; informer, que ce soit en rappelant des connaissances ou des résultats antérieurs ou en en annonçant de nouveaux ; proposer un travail, une question ou un résultat ; illustrer ; simplifier ; indiquer une méthode, un conseil ou une mise en grade.

3. – Le tableau tel qu'il apparaît aux élèves. Après avoir cherché *ce* que le professeur inscrivait ou montrait et *pourquoi* il le faisait, nous cherchons maintenant par ces questions à savoir *comment* le professeur inscrit ou montre au tableau. Nous

[10]Yves CHEVALLARD (1990), « Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique », *I.M.A.G.* n°122, Université Joseph Fourier-Grenoble I.

observons les moyens utilisés par l'enseignant pour optimiser la lisibilité du tableau en fonction de l'objectif qu'il poursuit, du contenu qu'il aborde et de la classe à laquelle il s'adresse. Nos questions sont relatives à l'autonomie de ce qui est écrit ou montré, au type langage ou de représentation utilisé (français courant, langage mathématique, graphique, schéma, icônes…) ainsi qu'à la présentation et aux codages (soulignement, utilisation de couleur…).

4. – La gestion du tableau par rapport à celle de la classe. On pose ici les questions relatives à l'inscription du tableau dans le scénario et dans l'animation de ce scénario durant la séance, que cette inscription soit prévue ou improvisée.

Le scénario se repère bien avec des indications du professeur qui ont été recueillies pendant les entretiens, ainsi qu'à la lecture de ce qui a été dit durant la séance. Une série de questions portent sur la relation entre ce qui est dit et fait en classe et ce qui est écrit au tableau. Nous pensons ainsi accéder à ce que le professeur ajoute (ou cherche à ajouter), par l'utilisation du tableau, au discours oral.

Le professeur dit et écrit, les deux messages émis sont parfois autonomes mais le plus souvent ils ne forment qu'un seul message dont les parties orales et écrites se complètent, s'illustrent ou se renforcent. Le professeur, nous le verrons, utilise souvent les deux modes d'émission pour adapter le message aux signes qui lui viennent de la classe(aisance, difficulté, ennui…).

L'oral disparaît dès qu'il est énoncé, l'écrit, lui, persiste. Le professeur écrit donc aussi pour laisser une trace du discours, le tableau est aussi une mémoire de la classe. Il nous semble que c'est à cette compétence dans l'émission complémentaire d'un message oral et d'un message écrit que les professeurs que nous avons interrogés faisaient référence quand ils évoquaient « l'art » d'écrire au tableau. Nous avons dissocié, au sein d'un message, la partie orale et la partie écrite. Nous avons ensuite repéré dans le temps les deux messages oral et écrit (le dit précède l'écrit, le succède…), nous avons indiqué s'ils étaient équivalents ou non au niveau du sens ; si oui, nous avons relevé si l'écrit était, ou non, une retranscription fidèle de ce qui a été dit.

Nous distinguons une écriture linéaire dont l'ordre respecte celui de la lecture et qui pourrait être remplacée par un transparent rétroprojeté, d'une écriture dynamique où l'ordre de l'apparition des éléments de l'ensemble ne correspond pas à celui de la lecture. Le message émis peut être le produit d'une construction de la classe. L'écriture, en train d'être produite, dans son caractère dynamique, témoigne de l'éventuelle volonté de celui qui écrit de signifier, durant l'écriture, quelque chose qui n'apparaît plus une fois que le message est écrit. Par exemple montrer l'importance relative de différents éléments du message écrit, distinguer l'ordre chronologique de la recherche qui n'est pas l'ordre de la rédaction de la solution, etc.

Nous avons aussi abordé sous cette rubrique les questions relatives à l'activité de la classe par rapport à ce qui est écrit au tableau, quel est le rôle de chacun quand le professeur ou quand un élève est au tableau ? Les élèves doivent-ils copier, critiquer, seulement suivre… ?

Nous avons enfin abordé la question du partage du tableau dans la classe. Qui écrit, qui est à l'origine de ce qui est écrit, qui efface… ?

Ces quatre rubriques et les questions qu'elles contiennent nous ont permis d'élaborer une grille de relevé d'indices pour l'analyse de l'utilisation du tableau. La première rubrique concerne la séance dans son ensemble, les trois autres concernent chaque scène de chaque épisode de la séance. Un modèle de cette grille figure en annexe de ce mémoire après les transcriptions des bandes vidéo. Les résultats ont été regroupés dans un tableau, également situé en annexe, que nous présenterons et que nous analyserons dans la seconde partie.

5. Une analyse globale de la séance, analyse qualitative

Une partie de l'analyse de la séance a été permise par l'élaboration de la méthode d'observation du tableau que nous venons de décrire mais il reste à confronter notre analyse a priori au déroulement effectif de la séance et à intégrer une analyse de l'utilisation du tableau à cette étude des séances. Mais comment analyser ces séances ?

Nous faisons l'hypothèse que rien de ce qui se passe en classe n'est complètement le fruit du hasard, ni du côté élèves ni du côté professeur. Pour nous, en conscience ou non, le professeur agit en adaptation continuelle à la situation de la classe, il improvise à partir d'expériences déjà vécues, de ce qu'il sait et de ce qu'il a prévu. Il a des objectifs de gestion pédagogique de la classe (introduction de la séance, activité, pause, bilan, échanges, test…) et des objectifs par rapport aux contenus d'enseignement (action, formulation, validation, décontextualisation, institutionnalisation, application, réinvestissement…) qui forment comme une série de rendez-vous avec la classe et avec la discipline. Le professeur navigue à vue pour conduire sa classe sans manquer de rendez-vous. Quelle signification donner à naviguer à vue ? D'après F.V. Tochon,

> *L'enseignant(e) chevronné(e) agirait le plus généralement sur la base de routines d'activités, d'enseignement, d'organisation et d'exécution. L'utilisation des routines diminuerait le nombre d'indices à traiter, de décisions à prendre et augmenterait la prédictibilité de l'action ce qui sécuriserait les élèves. (…) L'enseignant(e) expérimenté(e) professionnel chevronné, est rapide, focalisé sur les solutions à partir d'une grande richesse de réponses routinisées, de représentations et connaissances élaborées bien organisées entre elles ; en expert, il « voit » un scénario entier en un événement avant d'agir.*

Pour analyser les séances, nous avons procédé avec la méthode que nous utilisons en formation quand nous observons des classes de mathématiques. Cette méthode était, en fait, jusqu'à présent, restée implicite. Nous savons que la description que nous présentons ici n'est pas complète mais elle nous semble suffisante pour notre recherche.

Observer une classe, c'est observer à la fois les quatre facteurs que sont le professeur, les élèves, le contenu et les conditions matérielles ainsi que les interactions.

Nous repérons intuitivement, durant la séance, des moments qui correspondent à une situation d'équilibre dans la dynamique de la classe, ces moments où l'on a l'impression que tout le monde sait où on en est, et qui nous paraissent correspondre à ces « rendez-vous » que le professeur s'est fixé avec la classe et/ou avec la discipline. Après un rendez-vous, se pose la question du rendez-vous suivant (cette question est souvent envisagée par le professeur avant la fin du rendez-vous précédent) et du moyen d'y parvenir en interaction avec la classe, il utilise des réponses issues de son expérience, de ses connaissances disciplinaires et pédagogiques, et il en construit de nouvelles. Notre méthode d'observation consiste à repérer deux « rendez-vous » et le chemin emprunté par le professeur pour conduire la classe de l'un à l'autre.

Notre compréhension de la situation (ce qui nous permet de penser qu'on « voit » ce qui se passe dans la classe) nous semble reposer sur la connaissance que nous avons des rendez-vous possibles et de routines issues de l'expérience pour tracer des chemins pour la classe. Il nous arrive par moments d'avoir le sentiment de ne pas « voir » ce qui se passe dans la classe, nous attribuons cela au fait qu'il nous manque des connaissances sur les rendez-vous que prend le professeur. Ceux qu'il prend avec un élève particulier compte tenu d'événements passés ou ceux qui font référence au contrat général de fonctionnement de la classe nous échappent souvent. Nous concentrons en fait notre attention sur les rendez-vous que nous identifions. C'est là une restriction à la capacité d'observer, un observateur ne voit que ce qu'il peut voir…

Pour analyser l'utilisation du tableau par le professeur de façon qualitative, ce qui permettra de mettre en relation cette technique avec la dynamique de la classe et avec le contenu mathématique, nous avons utilisé une méthode inspirée de celle que nous venons de décrire. Nous avons découpé les séances en épisodes, unité par rapport au but pédagogique relatif aux mathématiques, et les épisodes en scènes, unités par rapport à l'utilisation du tableau. Le début de chaque scène est marqué par une utilisation du tableau (écriture, effaçage, monstration…), nous considérons chacune de ces utilisations comme un rendez-vous et nous déterminons sa fonction dans la progression de la séance (pédagogique ou disciplinaire). Nous isolons, ensuite, les actes spécifiquement relatifs au tableau afin de comprendre comment ils sont organisés et combinés pour former ce qui a été perçu comme une utilisation et qui nous a permis de délimiter la scène. Nous pensons ainsi, pour ce professeur, accéder à certaines des routines techniques relatives au tableau, et les mettre en relation avec la situation.

III. ANALYSES

Dans cette partie consacrée aux analyses, nous allons effectuer une analyse a priori et une analyse a posteriori de chaque séance. L'analyse a priori porte sur les savoirs abordés, nous préciserons les indications des programmes, les procédures des élèves et le projet du professeur. L'analyse a posteriori porte sur l'utilisation du tableau durant le déroulement des séances que nous étudions. Nous en ferons une première description grâce aux informations obtenues en utilisant la grille d'observation, puis nous procéderons à différentes comparaisons. Afin d'interpréter les résultats obtenus nous formulerons des hypothèses sur les pratiques de l'enseignant dans l'utilisation qu'il fait du tableau que nous confronterons à une analyse globale de quelques épisodes choisis à cette fin.

1. Analyses a priori

Comme nous l'avons annoncé dans la partie consacrée à l'exposé de la méthodologie adoptée, l'analyse a priori doit nous permettre de déterminer des événements qui pourraient survenir durant la séance. Nous recherchons leur origine par une analyse du contenu mathématique abordé, du niveau des élèves, du projet du professeur ainsi que de sa réalisation en classe. Dans le déroulement effectif de la séance, nous cherchons seulement à déterminer ce qui était resté implicite dans la description du projet par l'enseignant.

11. analyse a priori de la première séance

L'objectif de l'enseignant était de présenter la notion de parité des fonctions. Nous allons examiner les programmes officiels, décrire les représentations du professeur et analyser son projet. Nous indiquerons les difficultés ou les événements attendus durant cette séance.

a. Les programmes

La notion de parité des fonctions est contenue dans les programmes de la classe de seconde[11], précisons ce qui est indiqué. Le chapitre III, consacré aux fonctions, précise certains objectifs généraux :

---

[11]B.O. n°20 du 17 mai 1990.

Le programme combine les ***études qualitatives*** *(croissances, allure des représentations graphiques…) avec les* ***études quantitatives*** *(majorations, recherche de maximums…).*
Il ne porte que sur ***l'étude d'exemple*** *et se place dans le cadre des* ***fonctions définies sur un intervalle*** *; on évitera tout exposé général sur les fonctions (statut mathématique du concept de fonction, notion d'ensemble de définition, opérations algébriques, composition, relation d'ordre, restriction…). Le plus souvent, l'intervalle d'étude sera indiqué lors de la définition de la fonction considérée. Dans certains exemples, l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles : on se ramène alors à une étude portant sur chacun de ses intervalles ; on ne multipliera pas de tels exemples.*

Le paragraphe 1. du chapitre III des instructions officielles intitulé *« Génération et description des fonctions »* contient la notion de *« parité »* parmi les notions de périodicité, maximum, minimum, fonction croissante… Il est précisé que

Ces notions sont mises en place uniquement sur des exemples ; on mettra en valeur leur signification graphique.

b. Les représentations du professeur

Les professeurs élaborent un projet à partir des programmes mais aussi en fonction de leurs représentations de leur discipline, des mathématiques à enseigner, de la gestion d'une classe et des modes d'apprentissage des élèves. Les entretiens réalisés avant et après la séance ont permis partiellement d'accéder à ces représentations.

À propos des mathématiques. Le professeur reproche au manuel de ne traiter les propriétés des fonctions (parité, variations…) que sur des exemples, de ne rien démontrer… Il souhaite, lui, appliquer les résultats d'un travail portant sur les généralités à des exemples et aux fonctions de références. Son cours est prévu de cette façon « *on a le temps, en une heure, de faire fonction paire fonction impaire et puis c'est suivi d'exercices d'applications* ». Pour cet enseignant, en mathématiques, on pose les définitions et les théorèmes à utiliser et on applique ces connaissances pour résoudre les problèmes ; ce qui est en contradiction avec les programmes.

À propos de la transmission des connaissances. Le professeur introduit son projet par la volonté de « *mettre déjà en place le plan d'étude d'une fonction »* ce qui dépasse de beaucoup les objectifs du programme. Il justifie son point de vue par la crainte de fixer, dans l'esprit des élèves, des démarches qu'ils devront abandonner dans la suite de leurs études. Son interprétation des limites imposées par le programme n'est pas formulée durant les entretiens, paradoxalement, un argument est donné pour ne pas les dépasser, on peut faire des mathématiques et former les élèves à la réflexion quels que soient les contenus :

> *« On est toujours coincé entre d'un côté, mathématiques, on apprend à réfléchir donc on peut réfléchir avec n'importe quoi et même avec des outils peu performants et d'un autre côté, il faut quand même pas trop insister puisque les années prochaines ils vont avoir des outils plus performants.»*

À propos de l'apprentissage. Le professeur donne des conseils aux élèves : « *J'insiste aussi sur le fait qu'une définition s'apprend aussi en même temps qu'un exemple et qu'un contre-exemple, mais je sais pas si ça rentre hein ?* ». Il justifie ces conseils : « *quand on se réfère à nos études, surtout dans le supérieur, on se rend compte qu'il y a des pans de cours qu'on n'a pas assimilés parce qu'on manquait d'exemples. Mais en fait, quand on voit des exemples, on se dit qu'il nous a caché le truc pour qu'on comprenne pas, tout ça pour nous piéger à l'examen. Il suffit d'exemples pour retenir et d'exercices-types pour comprendre.* » Il explique les différences de niveaux entre les élèves par deux types de raisons en référence à l'opposition entre l'acquis et l'inné. Il y a ceux qui ont des acquis insuffisants : « *Un théorème une définition ça s'apprend par cœur mais ça suffit pas… ceux qu'ont pas de représentation tout ça ils y arrivent pas* ». Il y a ceux qui ont le don pour les mathématiques : « *Mais y a quand même toujours les mêmes, les bons, ceux qui vont trouver la méthode la plus performante pas comme ceux qui vont utiliser la même méthode la plus longue, les masochistes. C'est ce qu'on appelle le sens mathématique. (…) Les élèves qui sont bons maintenant étaient déjà bons avant, ils ne sont pas tous allés à Lourdes pendant les vacances…* »

c. Le projet du professeur

Cette séance repose, pour le professeur, sur deux définitions, celle des fonctions paires et celle des fonctions impaires. La condition de symétrie portant sur l'ensemble où est définie la fonction est commune aux deux définitions, elle fera l'objet de la première partie de la séance. Le déroulement prévu est :

– ensemble de réels symétrique par rapport à zéro, exemples et contre-exemples ;
– fonction paire, exemples et contre-exemples ;
– fonction impaire, exemples et contre-exemples.

Le projet d'un professeur expérimenté est fondé, du moins nous le supposons, sur les programmes, sur les manuels et ses propres connaissances, sur ses représentations des mathématiques, de l'enseignement et de l'apprentissage mais aussi sur les procédures des élèves qu'il connaît et sur ses expériences antérieures d'enseignement de la même notion. Nous avons donc consulté quelques manuels de seconde sur le thème de la parité des fonctions, puis nous avons procédé à quelques entretiens avec des enseignants ayant une expérience de ce niveau pour connaître les régularités qu'ils vivent quand ils enseignent cette notion ainsi que les procédures des élèves qu'ils connaissent. Nous allons analyser les thèmes abordés par les enseignants ; en ce qui concerne les élèves, nous utiliserons des questions posées à l'évaluation de fin d'année de seconde élaborée par l'APMEP (EVAPM seconde 1991)[12] pour lesquelles nous avons des résultats (pourcentage de réussite et d'analyse des erreurs).

Une notion objet en classe de seconde. L'intérêt mathématique de la notion est de limiter l'étude d'une fonction à une partie de l'ensemble de définition, elle permet aussi d'obtenir une information sur les coefficients d'un développement limité ou en série de cette fonction. Aucun de ces problèmes ne figure au programme de seconde donc, à ce niveau, cette notion n'est pas mathématiquement utile.

Afin de faire tout de même utiliser aux élèves la propriété de parité d'une fonction, les auteurs d'EVAPM Seconde 1991 ont utilisé un changement de cadre : ils ont proposé, dans un repère orthonormal, le graphique sur $[\,0\,;\,4\,]$ de la fonction *f* définie sur $[-4\,;\,4\,]$ par *f(x)* = $\frac{3}{x^2+1}$. L'énoncé comportait deux questions : « démontrer que *f* est une fonction paire » et « compléter ce tracé pour obtenir la représentation graphique de *f* dans l'intervalle $[-4\,;\,4\,]$. » Cet exercice étant situé en fin de questionnaire, on ne pourra pas interpréter les 44% de non-réponse, toutefois les 30% de réussite à la première question s'interprètent en partie par une difficulté de syntaxe algébrique, certains élèves écrivent :
$f(-x)=\frac{3}{-x^2+1}=\frac{3}{x^2+1}=f(x)$. Le tracé complet de la courbe est obtenu par 50% des élèves c'est à dire par presque la totalité des 66% qui ont abordé la question ; l'interprétation de ce pourcentage est rendue difficile par la question elle-même : la

[12]APMEP (1992), *Évaluation des programmes de Mathématiques seconde 1991*, publication n°88

courbe ne passant pas par l'origine, que pouvaient-ils tracer d'autre qu'une courbe symétrique par rapport à l'axe (Oy) ?

Un exercice, cette fois placé au milieu d'un autre questionnaire d'EVAPM seconde 1991, concernait la fonction g définie sur $[-2\,;2]$ par $g(x)=\frac{1}{3x^2+1}$. Une des questions était de démontrer que la fonction g est paire, 29% des élèves n'ont pas répondu à cette question et 39% ont réussi, c'est à dire un peu plus de la moitié de ceux qui l'ont abordée.

Plusieurs cadres et un changement de cadre éventuel. La notion porte sur la fonction, elle s'interprète graphiquement. Certains élèves ont des difficultés pour différencier un point de ses coordonnées, une fonction de sa représentation graphique. Une partie de ces élèves risquent donc de ne pas comprendre les traductions liées au changement de cadre « fonction – graphique », les autres trouvent peut-être là l'occasion de construire des connaissances. Remarquons de plus qu'au Collège, l'effet d'une transformation géométrique comme la symétrie orthogonale sur les coordonnées des points n'est pas au programme. Ainsi, pour les élèves de seconde, c'est un problème nouveau qui est posé dans le cadre géométrique. La difficulté d'appliquer ces connaissances dans le cadre graphique est accrue si leur présentation est trop récente pour que les élèves les aient acquises suffisamment.

Les fonctions paires ou impaires ont un ensemble de définition symétrique par rapport à zéro. Les élèves ont vu au Collège des parties de droites symétriques par rapport à un point (essentiellement qu'un segment est symétrique par rapport à son milieu) mais ils n'ont jamais interprété explicitement la situation dans le cadre numérique. Il est toutefois évident que l'expression « intervalle symétrique » évoquera chez de nombreux élèves « segment symétrique », d'autant plus que la notation des segments et des intervalles est commune : crochet, extrémité, point-virgule, extrémité, crochet (on écrit [AB] pour un segment et [*ab*] pour un intervalle).

Différents problèmes de négation. L'un d'entre eux se présente pour montrer qu'une fonction n'est ni paire ni impaire parce que l'ensemble de définition n'est pas symétrique : l'élève doit exhiber un exemple de réel de cet ensemble dont l'opposé n'est pas un élément. On peut s'attendre, durant la séance, à ce que certains élèves souhaitent nier « tout réel de E a son opposé dans E » par « aucun réel de E n'a son opposé dans E ».

Un autre est engendré par les connaissances antérieures dans le langage courant ou mathématique à propos de *in* (ou *im*) qui est un élément négatif. Impair signifie non-pair, les entiers naturels sont soit pairs soit impairs, un entier ne peut être ni aucun des deux ni les deux à la fois. En revanche, une fonction peut être à la fois paire et impaire (une seule, il est vrai…) ou n'être ni paire ni impaire. À la question « *calculer $f(-1)$ et $f(1)$ puis conclure sur la parité de f* » certains élèves écrivent que f est impaire après avoir montré que $f(-1) \neq f(1)$.

Les auteurs d'EVAPM seconde 1991 ont proposé à ce sujet un exercice de type QCM. Les élèves devaient cocher, pour quatre items, à partir de la représentation graphique d'une fonction f, une des trois cases « oui », « non », « jnsp (je ne sais pas) » pour chaque proposition :

– a – la fonction f est paire

– b – la fonction f est impaire

– c – la fonction f n'est ni paire ni impaire

– d – on ne peut pas connaître la parité de f

Les auteurs remarquent que beaucoup d'élèves qui cochent « non » pour – a – cochent systématiquement « oui » pour – b – et inversement. Ils remarquent aussi que certains élèves ayant coché « oui » pour – c – cochent aussi « oui » pour – d – confondant l'impossibilité de décider et le rejet de deux possibilités qui ne constituent pas une alternative.

Une interprétation ensembliste de la symétrie d'une courbe. La définition d'« ensemble symétrique » peut poser un problème pour l'enseignant. Si σ est une symétrie (centrale ou orthogonale) et E un ensemble (partie de R ou partie du plan), la condition $\sigma(\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}$ entraîne la condition $\sigma(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$ car σ est involutive. Ainsi, comment définir « E est σ-symétrique » ? La condition $\sigma(\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}$ est plus simple à utiliser mais elle passe sous silence une étape du raisonnement : il faut les deux inclusions pour obtenir l'égalité. La condition $\sigma(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$ demande les deux inclusions a priori indépendantes mais, avec l'argument σ est involutive, on utilise l'une pour obtenir l'autre ; la méthode est difficile à enseigner à des élèves qui confondent les propositions $\sigma(\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}$, $\sigma(\mathrm{E}) \supset \mathrm{E}$ et $\sigma(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$.

Une interprétation ponctuelle de la symétrie d'une courbe. Les enseignants de Lycée disent qu'ils rencontrent, à l'occasion de certains problèmes de lieux de points en géométrie, une difficulté analogue à celle qui se pose souvent pour démontrer qu'une courbe est symétrique. On peut en effet interpréter la propriété « E est σ-symétrique » autrement que dans un langage ensembliste, comme nous venons de le faire dans le paragraphe précèdent, en disant que le lieu des symétriques du point *M* quand *M* décrit E est E lui-même. Si l'élève doit prouver, par exemple, que la courbe Γ est symétrique par rapport à l'origine, il doit dans un premier temps établir que :

pour tout point *M* du plan, $M \in \Gamma \Rightarrow \sigma(M) \in \Gamma$[13] ;

le premier ∈ signifie, compte tenu du quantificateur, que *M* décrit Γ alors que le second signifie seulement que le symétrique de *M* appartient à Γ. Dans un second temps, la réciproque est nécessaire pour établir que tout point de Γ est le symétrique d'un point M c'est à dire que le symétrique de *M*, *σ(M)*, décrit lui aussi la courbe Γ. Mais cette propriété n'est pas établie indépendamment de la première si l'on utilise que la symétrie est involutive.

Des professeurs se disent souvent gênés parce que cette situation ne permet pas de traiter simplement une erreur de raisonnement (confondre parcourir et appartenir) qui ne conduit pas ici à un résultat faux alors que dans une autre situation la même erreur conduira l'élève à l'échec. La difficulté de l'argumentation rend pratiquement impossible à un professeur d'exiger la rigueur de raisonnement qu'il exige à d'autres moments de son enseignement.

Les ensembles de définition des fonctions paires ou impaires, des exemples types. Pour démontrer qu'une fonction est paire, l'élève doit commencer par s'assurer qu'elle est définie sur une partie de R symétrique par rapport à zéro. Il n'a pas à démontrer cette symétrie, il la reconnaît. Les ensembles de définition des fonctions étudiées à ce niveau sont de deux types : les intervalles et R privé de quelques éléments qu'on peut écrire comme réunion d'intervalles. Un objectif d'un professeur de seconde est donc de permettre aux élèves de reconnaître parmi ces types de sous-ensembles de R ceux qui sont symétriques par rapport à zéro. Un intervalle est symétrique par rapport à zéro si, et seulement si, les bornes sont opposées et de même type (incluses ou exclues) ; on remarquera le cas de R. Une partie égale à R privé de quelques réels est symétrique par rapport à zéro si, et seulement si, chaque réel ôté l'est avec son opposé ; on remarquera le cas de R*.

12. analyse a priori de la seconde séance

L'objectif de l'enseignant était de présenter la notion de fonction croissante (décroissante) sur un intervalle. Comme précédemment nous allons exposer les indications des programmes, et analyser le projet du professeur. Nous ne reviendrons pas sur ses représentations qui ont une influence sur l'élaboration du projet de la séance ainsi que sur son animation. Nous indiquerons, comme précédemment, les difficultés ou les événements attendus.

a. Les programmes

Le titre figurant dans les programmes[14] est « *fonctions croissantes, fonctions décroissantes »*. Nous ne répéterons pas les consignes générales sur les fonctions ni les consignes particulières aux thèmes parité, périodicité, extremum et variation mais nous ajouterons un point qui concerne explicitement les variations :

> *Les notions de taux de variation, de maximum local et de minimum local ne sont pas au programme.*

Des exemples de fonctions à étudier figurent dans la partie intitulée « *Travaux pratiques » :*

> *On entraînera les élèves à mettre en œuvre les méthodes employées pour les fonctions usuelles pour l'étude de comportement de fonctions telles que* $x \mapsto 2x^2+1,\ x \mapsto (x-1)^2,\ x \mapsto \dfrac{2}{x^2+1},\ x \mapsto x(1-x),\ x \mapsto \sin 2x,$ *toutes les indications utiles étant fournies.*

b. Le projet du professeur

Cette séance repose, selon le professeur, sur deux définitions, celle des fonctions croissantes et celle des fonctions décroissantes. Le cas des applications affines a déjà été rappelé à l'occasion des tests nationaux d'évaluation à l'entrée en seconde. Le professeur prévoit que, dans cette bonne classe, les élèves n'auront pas de difficulté

---

[13] *σ étant la symétrie de centre O.*
[14] Op. Cit.

pour prouver qu'une fonction est monotone sur un intervalle en appliquant les théorèmes sur les variations des fonctions :

> *« ils ont déjà vu les fonctions affines alors si c'est monotone, c'est le cas de le dire ! ça va aller vite (...) je pense qu'on va prendre les fonctions où on ne peut pas trouver le sens de variation directement... donc où on est obligé de passer par l'intermédiaire de la différence donc factoriser et chercher le signe... et même avec eux je pense que je peux même arriver à leur faire deviner les bornes de l'intervalle...* $x^2 - x$ *, sur* R^+ *de préférence (rires)... ah ! y en a un qui monte, l'autre qui décroît... »*

Comme pour la séance précédente, nous avons consulté quelques manuels de seconde sur le thème des variations des fonctions et nous avons interrogé, au cours des entretiens évoqués précédemment, les enseignants sur cette notion. Nous allons analyser les thèmes abordés par ces enseignants en utilisant une fois encore les évaluations de l'EVAPM seconde 1991 pour l'étude de procédures des élèves.

Un changement de cadre. La notion porte sur la fonction, elle s'interprète graphiquement. Rappelons que certains élèves distinguent mal la fonction de la courbe, la difficulté est accrue par le fait qu'il n'y a pas de terme pour décrire la courbe d'une fonction croissante ce qui conduit à des abus de langage du type « la courbe est croissante », « la courbe monte », « la fonction monte », abus d'ailleurs commis plus haut par le professeur de la classe. Remarquons que, dans ce changement de cadre fonction – graphique, se glisse un tiers : le tableau de variation.

L'évaluation EVAPM indique que 82% des élèves savent dresser le tableau de variation d'une fonction à partir de sa représentation graphique, que 80% des élèves savent décrire les variations d'une fonction par des phrases à partir du tableau de variation.

Une notion qui s'utilise... peu... 17% des élèves ayant participé à l'EVAPM seconde de 1991 réussissent à établir correctement la décroissance de la fonction *g* définie sur $[0\,;2]$ par $g(x)=\dfrac{1}{3x^2+1}$. Il y avait au moins deux démarches possibles, l'utilisation de résultats sur les fonctions connues ou bien la comparaison de *g(x)* et *g(x')* pour tout couple (x ; x') de nombres de $[0\,;2]$ tel que $x<x'$. La première démarche a été tentée par 12 % des élèves, la seconde par 36 % d'entre eux.

Doit-on attribuer aux effets de l'enseignement le fait que trois fois plus d'élèves utilisent la seconde méthode, celle qui conduit toujours au résultat, ou au fait que l'acquisition des « opérations algébriques » sur la croissance et la décroissance soit difficile ou encore au fait que les enseignants interprètent la phrase « *On évitera tout exposé général sur les fonctions… opérations algébriques, composition…* » comme une restriction à l'étude des opérations sur les fonctions monotones ? Pourtant figure, dans les programmes, l'objectif :

> *« – Acquérir une* ***bonne maîtrise des fonctions usuelles*** *indiquées dans le programme et un certain savoir-faire, toutes les indications utiles étant fournies, pour l'étude des fonctions qui s'en déduisent simplement. »*

Paradoxalement, l'enseignant de la séance que nous avons étudiée pense que la première démarche est facile pour les élèves de sa classe, qu'il ne s'y attardera pas et qu'il passera aux cas nécessitant la seconde démarche.

Une propriété globale. La croissance d'une fonction est définie sur un ensemble, le caractère global empêche de tenir des raisonnements du type : la fonction $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ est décroissante sur R^{-*} et sur R^{+*} donc elle est décroissante sur R^{*}. Ce type de raisonnement, valable sur des propriétés locales, est utilisé par exemple pour les fonctions positives afin de déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\left(x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}\right)$: $(x \mapsto x^2 - 1)$ est positive sur $]-\infty\ ;\ -1]$ et sur $[1\ ;+\infty[$ donc elle est positive sur $]-\infty\ ;\ -1] \cup [1\ ;+\infty[$ et finalement, puisque la fonction racine carrée est définie sur R^{+}, $\left(x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}\right)$ est définie sur $]-\infty\ ;\ -1] \cup [1\ ;+\infty[$.

Une autre procédure des élèves est de conclure que la fonction g, vue à la page précédente, est décroissante sur l'intervalle $[0\,;2]$ à partir des deux seules informations $g(0) = 1$ et $g(2) = \frac{1}{13}$. Cette fonction g est effectivement décroissante ; ainsi, on interprétera difficilement le fait que, dans l'exercice d'EVAPM cité plus haut, 45% des élèves dressent correctement son tableau de variation.

Un problème de négation. On rencontre beaucoup moins d'élèves qui affirment qu'une fonction est décroissante si elle n'est pas croissante, qu'on en trouvait pour conclure qu'une fonction est impaire dès qu'elle n'est pas paire.

Un problème de négation existe pourtant. Considérons les fonctions f et g définies sur $[-1;2]$ par $f(x) = x+2$ et $g(x) = x^2$. $f(-1) = 1$, $f(2) = 4$ et f est croissante sur $[-1;2]$; pour g il en va autrement puisque $g(-1)=1$, $g(2)=4$ et que g n'est pas croissante sur $[-1;2]$. Aux élèves qui demandent ce qu'il en est de cette fonction g du point de vue de sa variation, on pourra répondre que g est décroissante sur l'intervalle $[-1;0]$ et croissante sur $[0; 2]$. Cette réponse encourage les élèves à construire implicitement un théorème selon lequel une fonction définie sur un intervalle I est croissante ou décroissante par section[15]. Ce théorème est faux mais le prouver n'est pas simple. Un contre-exemple est la fonction indicatrice de l'ensemble Q des rationnels mais il est difficile d'accès à un élève de seconde d'autant plus que l'objectif des programmes est « *la description des phénomènes continus à l'aide des fonctions* » ; un autre exemple, continu mais aussi peu accessible à un élève de seconde, est la fonction h définie sur $[-\pi ; \pi]$ par $h(0) = 0$ et, pour $x \neq 0$, $h(x) = x^3 \sin\frac{1}{x}$.

L'enseignant peut être gêné à propos de la fonction g vue précédemment, et plus généralement à chaque fois qu'il doit conclure qu'une fonction n'est pas monotone, s'il enseigne aussi à un niveau supérieur où il perçoit des effets éventuels de l'erreur signalée. C'est le cas du professeur des séances que nous étudions qui fait passer des « colles » à des élèves de classes préparatoires aux grandes écoles.

Un cas particulier de la règle du « maximum d'information »[16]. Certains auteurs et professeurs distinguent les fonctions strictement croissantes sur l'intervalle I des fonctions croissantes sur I. Quand la question posée est de démontrer qu'une fonction f est croissante sur l'intervalle I alors qu'elle l'est strictement, les élèves partent de $x < x'$ et obtiennent $f(x) < f(x')$ alors qu'ils s'attendent à obtenir $f(x) \leq f(x')$.

[15] i.e. « *telle qu'on puisse partager l'intervalle de variation de x en un nombre fini d'intervalles dans chacun desquels f (x) est soit croissante soit décroissante* » c.f. VALIRON (1947), « *Théorie des fonctions* », Masson, Paris, p. 73.

[16] Nous entendons par « règle du maximum d'information » un implicite qu'on trouve fréquemment parmi ceux du contrat didactique à propos des questions posées par les enseignants aux élèves : la réponse doit comporter, pour être considérée comme satisfaisante, le maximum d'information. Par exemple à la question « que peut-on dire du quadrilatère ABCD ? » posée sur un rectangle, la réponse ABCD est un parallélogramme est, en référence à cette règle implicite, comptée comme fausse.

Les professeurs interrogés signalent qu'une partie de la classe conclut correctement mais, ces élèves mis à part, les uns pensent avoir commis une erreur car ils n'arrivent pas à ce qui est demandé, les autres estiment que leur réponse est fausse car si la question est de prouver que la fonction est croissante, c'est (règle du maximum d'information) qu'on ne peut pas dire qu'elle l'est strictement.

Dans la pratique, la condition de stricte monotonie d'une fonction f continue sur un intervalle I est utile pour prouver que la fonction (de I vers f (I)) est bijective d'où, par exemple, l'existence et l'unicité d'une solution sur I à une équation du type $f(x) = \lambda$, $\lambda \in f$(I). La stricte monotonie n'est pas utile, en revanche, pour dresser un tableau de variation comme on le demande souvent en classe de seconde, ce qui explique (du point de vue de professeur, en rupture avec la règle du maximum d'information) que des questions portent seulement sur la monotonie.

Concluons cette analyse a priori en remarquant les points communs entre les deux séances : objectifs des programmes (étude d'exemple, lien avec la signification graphique), difficultés prévisibles (deux cadres et possibilité de changement de cadre, problème de négation, problème de logique), nécessité de contre-exemples (une fonction ni paire ni impaire et une fonction ni croissante ni décroissante sur un intervalle)…

Du point de vue mathématique, les deux notions étudiées permettent une étude qualitative des fonctions, ils portent sur des propriétés globales. Du point de vue de l'enseignant des séances que nous étudions, ces concepts se prêtent bien, dans une première partie, à un scénario de type « définition – exemples – contre-exemples » qui permet aux élèves de se créer des représentations puis, dans une seconde partie, à une séance d'exercices corrigés pour que ceux qui en ont les possibilités puissent comprendre.

2. Analyses a posteriori

Ces analyses des séances reposent sur la transcription des bandes vidéo, sur un découpage de chaque séance en épisodes – unités de travail mathématique – et de chaque épisode en scènes – unité d'utilisation du tableau noir – ; compte tenu de l'importance du travail de transcription, nous avons limité l'étude de chaque séance aux quinze premières minutes.

Dans un premier temps, nous présenterons les résultats obtenus par l'utilisation de la grille d'observation du tableau que nous avons exposée dans la partie méthodologique et qui figure en annexe. En procédant par comparaison, nous analyserons ces résultats et nous les interpréterons pour montrer à la fois la diversité de l'utilisation du tableau et le lien avec le déroulement de la séance ou avec le niveau de la classe. Cette analyse nous permettra également de repérer des scènes représentatives de différents modes d'utilisation du tableau et pour lesquelles il conviendrait d'approfondir l'analyse.

Dans un second temps, nous procéderons à une analyse globale de chaque épisode que le travail précédent aura permis de repérer. Nous utiliserons la « méthodologie de formateur » que nous avons exposée dans la partie méthodologique. Cette analyse nous permettra d'identifier et de décrire certaines techniques d'utilisation du tableau, de montrer comment elles sont déterminées à la fois par le contenu mathématique et par le projet du professeur mais aussi comment elles sont, de façon improvisée, adaptées dans l'instant à la classe afin d'atteindre l'objectif que l'enseignant avait fixé pour la classe.

21. Analyses spécifiques du tableau

Les données ont donc été recueillies en utilisant la grille. Pour les informations concernant la séance complète, nous avons pu nous contenter du visionnement de la bande vidéo. Pour les informations concernant chaque épisode et chaque scène, nous avons dû restreindre l'étude au premier quart d'heure car la transcription était indispensable. Les résultats bruts sont donnés en annexe. Nous avons réalisé un tableau qui présente, pour chaque caractère étudié, les fréquences des valeurs prises (exprimées en pourcentage par rapport à l'ensemble des scènes puis en pourcentage par rapport aux seules scènes où le caractère était observable). Par exemple, pour l'étude du caractère « *choix de ce qui est montré au tableau par le professeur* », nous avons obtenu, pour la classe de seconde A, 44% de scènes où le professeur montre quelque chose au tableau ; pour la valeur « *le professeur montre une globalité* » nous avons une fréquence égale à 16,2% de l'ensemble des scènes soit une fréquence de 36,8% des scènes où le professeur utilise le tableau pour montrer quelque chose. Ce tableau de résultats figure également en annexe.

Nous avons procédé ensuite à des croisements de données. Nous avons dressé un premier tableau comparatif de l'utilisation du tableau dans les deux classes durant une même activité mathématique : écriture d'une définition. Nous avons renouvelé l'expérience avec une autre activité : l'étude d'un exemple illustrant la dite définition. Nous avons aussi dressé un tableau comparatif de l'utilisation du tableau dans les deux classes suivant que l'activité du professeur est, ou n'est pas, d'exposer des mathématiques. Nous avons enfin dressé un tableau comparatif de l'utilisation du tableau dans les deux classes quand ce qui est écrit ou montré au tableau a pour origine l'intervention d'un élève. Rappelons, avant de commencer les comparaisons, que la classe de seconde A est composée d'élèves plus faibles en mathématiques que la classe de seconde B.

a. Comparaison générale des deux séances

Le tableau de l'enseignant. Pour tous les critères concernant la totalité de la séance (nombre de tableaux couverts, organisation générale, effaçage…) les résultats sont identiques dans les deux classes. On peut supposer mais il faudrait au moins davantage de séances pour l'affirmer que, pour ce professeur, il s'agit d'automatismes ; nous nous contenterons ici de remarquer les régularités. Décrivons-les. L'enseignant commence à écrire en haut et au centre du tableau. On peut expliquer ce choix par le fait cet endroit est le plus proche du bureau mais aussi par le fait qu'il correspond au plan de symétrie de la classe. Ce choix paraît pourtant en contradiction avec l'organisation générale du tableau : le professeur remplit des colonnes de gauche à droite et efface pour faire de la place quand le tableau est couvert. L'effaçage est partiel mais il n'est pas organisé à des fins pédagogiques, le professeur efface des zones et non des parties de textes, il laisse ainsi au tableau des parties devenues illisibles. Il a couvert environ un tableau et demi par séance.

Le contenu du tableau. Un critère concernait chaque épisode c'est à dire chaque unité de travail mathématique pour la classe. Nous avons regardé si le contenu du tableau correspondait à un texte mathématiquement complet. Nous n'avons pas retenu l'absence de quantificateurs ou des connecteurs logiques qui ne sont pas au programme de seconde et qui sont plutôt signalés oralement pour leur sens. Nous avons également négligé les conclusions du type « finalement, la fonction f est paire » qui sont énoncées oralement. Une différence sensible entre les deux classes a été notée : dans la seconde A le texte du tableau est mathématiquement complet dans 50% des épisodes alors qu'il l'est à 100% dans l'autre classe. Comme nous le montrerons dans l'analyse globale des séances, cette différence correspond au fait qu'avec les meilleurs élèves, le tableau est utilisé pour rédiger des conclusions, il sert alors de modèle aux élèves alors que dans la moins bonne classe, le tableau est plutôt utilisé pour marquer les étapes de l'avancement du cours et les inscriptions sont alors suivies de compléments d'information mathématique ou méthodologique.

La répartition des fonctions de ce qui est écrit ou montré au tableau scène après scène est assez semblable dans les deux classes. Remarquons néanmoins que dans la classe faible, le professeur utilise le tableau pour donner des conseils (en écrivant ou en montrant), des mises en garde ou des méthodes (dans 13,9% des scènes) alors qu'il ne l'a jamais fait dans la bonne. La différence de fréquence de la fonction « illustrer » entre les deux classes s'explique par la différence de contenu entre les deux quarts d'heure étudiés comme nous le verrons ultérieurement.

L'apparence du tableau. Dans le caractère « *langage de ce qui est* écrit » nous avions, entre autres, repéré comme valeurs possibles « *mathématiques* », « *graphique* » et « *icônes* ». Dans la classe de seconde A, on obtient respectivement les fréquences 93%, 0% et 0% alors que dans l'autre classe, on obtient 54,2%, 22,8% et 8,6%, soit un total de 93% dans la première et de 85% dans la seconde. Nous comparons les sommes des fréquences de ces valeurs car dans la séance qui a eu lieu avec la seconde B, les variables « *graphique* » et « *icônes* » n'apparaissent que dans l'épisode où le professeur a représenté une fonction croissante qu'il a notée « *fonction* ↗ », le graphique et l'icône peuvent, dans cette situation être assimilés à du langage mathématique. Ainsi, la présence de la représentation graphique d'une fonction dans la seconde séance explique la différence des résultats concernant le langage. Au tableau, le professeur utilise pratiquement exclusivement le langage mathématique.

On remarque une différence dans l'autonomie de l'écrit : dans la classe la plus faible les écrits autonomes sont moins fréquents (42,8% contre 66,7%), les informations complémentaires permettant de comprendre les inscriptions sont données oralement. En ce qui concerne les éléments montrés au tableau, ils sont plus fréquemment partiels dans la bonne classe (95% contre 63,2%), le professeur montre plutôt des dépendances entre des parties de l'énoncé ; cela correspond peut-être à la recherche d'une certaine qualité de réflexion. Dans la classe faible, le professeur montre plus que dans l'autre (36,8% contre 5%) une globalité comme pour insister davantage sur ce qui doit être écrit ou fait, la réflexion sur le discours lui-même ou sur la méthode elle-même est moins importante.

En ce qui concerne la présentation, on ne remarque pas de différence sensible entre les deux séances (20,9% et 24,4%), le fait de souligner, d'encadrer ou d'utiliser de la couleur pour présenter davantage ce qui est inscrit fait peut-être partie des automatismes du professeur qui ne seraient pas, dans une certaine mesure, influencés par la classe et par le contenu abordé.

La gestion du tableau par rapport à celle de la classe. Nous avons repéré comment, scène par scène, le dit et l'écrit sont situés par rapport au temps. On remarque que dans la meilleure classe le dit et l'écrit sont le plus souvent simultanés (65,6% des scènes) et le sont plus que dans la classe faible (45%). Cela correspond au fait que le professeur est, quand il écrit au tableau, plus magistral dans la bonne classe que dans l'autre où des explications antérieures ou postérieures sont données oralement.

Nous avions différencié l'écriture linéaire (le message est écrit comme il se lit oralement) et l'écriture dynamique (le message n'est pas écrit dans l'ordre de la lecture orale). On remarque une utilisation plus fréquente de l'écriture dynamique dans la bonne classe. Comme nous le verrons dans l'analyse globale des séances, l'écriture dynamique correspond à une technique assez sophistiquée par laquelle le professeur donne aux élèves des explications ou des indications sur ce qu'il écrit. Utilise-t-il plus souvent cette technique dans la bonne classe pour compenser le fait qu'avec elle, il est plus magistral ? L'analyse globale permettra de répondre à cette question.

Nous avons relevé la présence de différences entre le message émis oralement et le message écrit. Les résultats obtenus sont les mêmes dans les deux classes : les discours sont identiques ou analogues dans 47,3% des scènes pour la seconde A et dans 46,7% des scènes pour l'autre classe.

L'organisation et la répartition des tâches sont les mêmes dans les deux classes ce qui laisse penser encore une fois à des automatismes de cet enseignant : aucune consigne n'est donnée par rapport à ce qui est écrit, le professeur est le seul à décider qu'on écrive au tableau et il est le seul à écrire. Dans la classe la plus faible, les élèves semblent être plus fréquemment à l'origine du contenu qui est inscrit au tableau (25,5%

des scènes) que dans la meilleure (16,2% des scènes). L'analyse globale permettra d'expliquer cette différence, on constate que le professeur effectue une reprise ou une synthèse des idées ou des résultats proposés par les élèves avant d'écrire au tableau un texte plus rédigé.

b. Comparaison de deux épisodes portant sur la même activité

Écriture d'une définition. Cette activité a été retenue car le traitement a été différent dans les deux classes : dans la moins bonne, la définition d'un intervalle symétrique par rapport à zéro a été écrite par le professeur puis il a proposé des études d'exemples alors que dans la meilleure, l'écriture de la définition a été précédée et suivie d'une discussion en classe à partir des connaissances des élèves.

L'examen du tableau de résultats montre que dans la première classe l'écriture est linéaire (100%) et l'oral et l'écrit sont identiques (100%), ce qui rend compte d'un épisode de « cours magistral », alors que dans la seconde l'écriture est dynamique dans 40% des scènes et l'oral et l'écrit sont différents dans 33% des scènes, ce qui rend compte d'une certaine interaction pédagogique médiatisée par le tableau.

Étude d'un exemple. Nous avons choisi les exemples « $[-3\ ;\ 3]$ est symétrique par rapport à zéro » et « $(x \mapsto 4x + 7)$ est une fonction croissante sur R » parce qu'ils mettent en œuvre les connaissances sur l'effet des opérations sur une inégalité et qu'ils ont été traités de la même façon : prouver que l'exemple choisi satisfait au critère de la définition. Le tableau des résultats montre une différence importante de fonction de l'écrit, il est utilisé à 40% à des fins d'organisation, d'aide ou de conseil dans la classe de seconde A alors qu'il ne l'est pas du tout (0%) dans l'autre classe. En revanche, ce qui est montré est une globalité dans 67% des scènes avec la classe faible alors qu'il l'est dans seulement 14% des scènes avec la bonne classe.

L'écriture est différente dans les deux classes. Elle est toujours linéaire dans la meilleure seconde (100% des scènes) mais pas dans l'autre (67%) ; le discours oral et l'écrit sont simultanés dans 58% des scènes avec la bonne classe mais seulement dans 30% des scènes avec la plus faible ; enfin les deux messages oral et écrit sont identiques dans 25% des scènes avec la meilleure classe alors qu'ils ne le sont jamais dans l'autre (0%). On peut émettre, pour interpréter ces résultats, l'hypothèse suivante que l'analyse globale des épisodes permettra d'examiner : ces différences proviennent du degré de fermeture des questions posées aux élèves, qui n'est pas le même dans les deux classes.

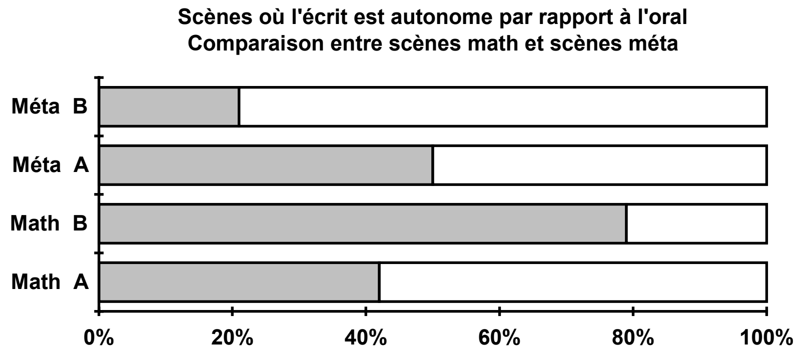
En effet, le professeur pratique, avec les deux secondes, un enseignement de type « magistral mais dialogué » où l'enseignant fait cours en posant explicitement aux élèves les questions abordées mais en variant le degré de fermeture de ces questions pour obtenir des réponses et en continuant son cours dès qu'un élève au moins a répondu de façon à satisfaire le professeur. Plus les questions sont fermées, plus elles sont nombreuses et plus le professeur avance par étapes courtes ; les inscriptions au tableau qui marquent ces étapes sont alors souvent sources de commentaires. Mais plus les questions sont ouvertes plus les étapes sont longues et plus les inscriptions au tableau figurent comme des conclusions qui ont déjà fait l'adhésion de la classe et donc qui se passent de commentaires. On remarquera pourtant que, d'après nos résultats, les élèves sont sollicités autant dans les deux classes. En effet, nous avons repéré l'absence ou la présence d'une intervention d'un élève scène par scène mais les scènes ont été déterminées par unité d'utilisation du tableau et non par un critère de durée. Cela explique que, même si dans une classe il y a moins d'interventions d'élèves par écriture au tableau que dans l'autre, les résultats obtenus soient identiques dès qu'il y en a dans les deux.

c. Comparaison des scènes suivant la fonction de ce qui est écrit au tableau.

Nous souhaitions séparer les scènes en deux catégories, celles où le tableau est utilisé pour exposer des mathématiques et les autres qui concernent plutôt des apports métamathématiques, les indications, les conseils, les méthodes… Nous avons, dans le tableau des résultats bruts, isolé des autres scènes celles où les valeurs II.B.4 ou II.B.5 étaient égales à 1 (c'est à dire où la fonction de ce qui est écrit ou montré est d'*informer ou rappeler une connaissance ou un résultat* ou de *proposer un travail, une question, une réponse ou un résultat*) : elles correspondent aux apports mathématiques. Nous avons dressé ensuite un tableau où figurent, pour chacune des classes, les résultats suivant les deux types d'utilisation ainsi définis.

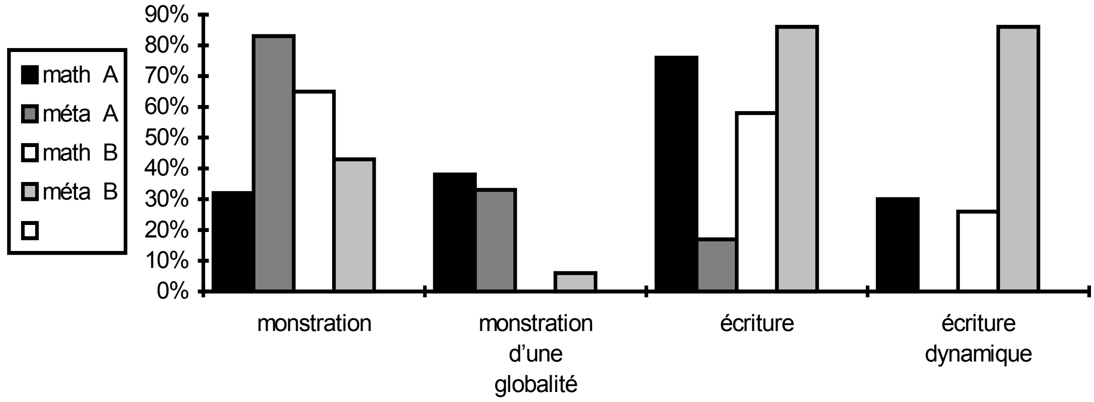
L'examen des résultats montre que la répartition des scènes entre celles où l'utilisation du tableau correspond à des apports mathématiques (qu'on appellera scènes math) et celles où l'utilisation correspond à des apports métamathématiques (qu'on appellera scènes méta) sont voisines dans les deux classes (seconde A, math : 86% et méta : 14% ; seconde B, math : 79% et méta : 21%).

En ce qui concerne l'autonomie de l'écrit par rapport à l'oral entre les classes, on retrouve la différence déjà remarquée entre les classes pour les scènes math (les fréquences de la valeur « *autonome* » sont pour les scènes math, 42 % pour la seconde A, et 79 % pour la seconde B) mais pour les scènes méta la tendance est renversée (les fréquences de la valeur « *autonome* » sont, pour la seconde A, méta : 50% et pour la seconde B, méta : 21%).



On remarque aussi une différence importante entre les deux classes et entre les scènes math et méta en ce qui concerne le fait de montrer, le choix de ce qui est montré, le fait d'écrire et le type d'écriture. Dans la classe dite faible, le tableau est utilisé pour montrer dans 83% des scènes méta et dans 32% des scènes math ; dans la bonne classe, le professeur montre au tableau dans 43% des scènes méta et dans 65% des scènes math. Le choix de ce qui est montré diffère suivant la classe, dans la première ce qui est montré est une globalité dans 33% des scènes méta et dans 38% des scènes math mais dans la seconde, ce qui est montré est une globalité dans 0% des scènes méta et dans 6% des scènes math. Ces résultats semblent liés à ceux qui concernent l'écriture. Dans la seconde A, le professeur écrit au tableau dans 17% des scènes méta et dans 76% des scènes maths alors que dans l'autre classe, il écrit au tableau dans 86% des scènes méta et dans 58% des scènes math. Dans la classe faible, l'écriture est dynamique dans 0% des scènes méta et dans 30% des scènes math alors que dans la bonne, l'écriture est dynamique dans 86% des scènes méta et dans 26% des scènes math.

Montrer et écrire : comparaison
scènes math et scènes méta entre les classes



En conclusion, nous dirons que, durant les séances étudiées, la répartition des apports mathématiques et des apports métamathématiques est indépendante de la classe, que la manière d'utiliser le tableau est très différente suivant ces deux types d'activités mais qu'en plus, elle dépend fortement du niveau des élèves.

Comparaison, dans les deux classes, des scènes où un élève est à l'origine de ce qui est écrit ou montré au tableau. Nous avons, dans le tableau des résultats bruts, extrait les scènes concernées[17] puis, pour ces scènes, nous avons dressé un nouveau tableau des fréquences des différentes valeurs pour les secondes A et B.

Le professeur montre une fois sur trois quelque chose au tableau à partir d'une intervention d'élève et ce dans les deux classes. On ne retrouve pas la différence entre les deux classes constatée sur la séance totale à propos de ce qui est montré au tableau : la répartition entre « *le professeur montre une globalité* » et « *le professeur montre une partie* » est la même pour chacune des deux classes.

En ce qui concerne l'écriture, on ne remarque pas de changement de répartition entre écriture linéaire (63%) et écriture dynamique (37%) dans la classe la plus faible. En revanche, dans la meilleure classe, l'écriture est moins dynamique que sur la globalité de la séance quand elle a pour origine l'intervention d'un élève (20% au lieu de 43%).

On notera enfin deux différences importantes entre les deux classes. Première différence : ce qui est dit et ce qui est écrit est différents dans 22% des scènes pour la seconde A et dans 67% des scènes pour la seconde B. Deuxième différence qui est peut être une conséquence au moins partielle de la première : l'origine de ce qui est écrit ou montré au tableau n'est jamais partagée entre le professeur et un élève (0%) alors qu'elle l'est deux fois sur trois dans la meilleure classe (67%).

Ces résultats permettent de constater que l'utilisation du tableau est assez semblable dans les deux classes quand ce qui est écrit ou montré a pour origine l'intervention d'un élève, nous constatons également que l'utilisation du tableau est, dans ce cas, proche de celle qu'on peut observer sur la séance globale dans la classe la plus faible.

Quelles questions pour l'analyse globale ? L'analyse quantitative et spécifique du tableau que nous venons de mener montre une certaine régularité dans l'utilisation globale malgré le changement de classe et de contenu : même quantité inscrite, même disposition, même type d'effaçage, même langage utilisé, même qualité de présentation, même organisation des tâches au sein de la classe… Mais elle montre aussi une grande variété des façons d'utiliser le tableau en fonction de la gestion de la classe au cours d'un épisode et du niveau des élèves : écriture linéaire ou dynamique, autonomie de l'écrit par rapport à l'oral, nature de ce qui est montré par rapport à ce qui est écrit…

Dans l'analyse globale qui tient compte de tous les événements de la séance, nous décrirons, avec la plus grande précision, l'utilisation que le professeur fait du tableau en relation avec le contexte de la classe. Nous savons maintenant qu'il existe des relations entre les choix d'utilisation du tableau, les interactions pédagogiques, le niveau des élèves et les savoirs abordés. Nous tenterons de les comprendre et de savoir comment, finalement, l'utilisation du tableau par l'enseignant fait partie des moyens qu'il met en œuvre pour atteindre ses objectifs pédagogiques.

22. Analyses globales des séances

a. Choix des épisodes à analyser globalement.

Notre objectif restant de comparer les deux classes, nous conservons les mêmes critères de choix que pour l'analyse spécifique du tableau. Ainsi, les quatre épisodes déjà étudiés (deux définitions et deux exemples) feront l'objet d'une analyse globale mais, pour accéder à toutes les informations qui pourraient nous permettre de

---

[17] Scènes où la valeur V.F.2 est égale à 1

comprendre les choix du professeur, nous avons rajouté des épisodes qui font partie du contexte de ceux qui ont déjà été retenus. Finalement, nous étudierons :

– les quatre premiers épisodes de la première séance : définition d'un intervalle symétrique, l'exemple de R, de R* et de [– 3 ; 3] ;

– les deux premiers épisodes de la seconde séance ainsi que le septième : coefficient directeur d'une fonction affine, définition d'une fonction croissante, l'exemple de la fonction ($x \mapsto 4x + 7$).

b. Première séance : ensembles symétriques par rapport à zéro

Le premier quart d'heure de cette séance contient huit épisodes présentés en détail dans l'annexe. Le premier épisode repose sur la définition d'un ensemble symétrique, les épisodes 2 à 6 présentent des intervalles symétriques ou non R, [– 3 ; 3], [– 3 ; 3[et [0 ; 2], les deux derniers épisodes sont consacrés à R^* et à $R \setminus \{1\}$.

Épisode n°1 : définition d'un intervalle symétrique. En quelques mots, le professeur annonce l'objectif (préparer des définitions ultérieures) et le plan de la première partie (définition d'ensemble symétrique puis exemples dont des intervalles puis des réunions d'intervalles).

Par rapport à ce qui est annoncé, définir un ensemble symétrique par rapport à zéro, le professeur révise à la baisse son objectif puisqu'il définit seulement un intervalle symétrique I. Mais il n'écrit pas le début de la définition : « Soit I un intervalle de R, I est symétrique par rapport à zéro si … » Ainsi pourra-t-il utiliser la partielle définition écrite au tableau pour des ensembles qui ne sont pas des intervalles. Tout se passe comme s'il allégeait la tâche des élèves qui à ce moment interprètent la définition sur I intervalle et non sur I partie quelconque de R.

Dans sa définition, le professeur passe complètement sous silence le problème du quantificateur, à aucun moment de cet épisode il ne dit que l'implication « Si $x \in$I, alors $-x \in$I » doit être vérifiée pour tout x de R, il dit « *x appartient à I* » et non « x décrit I ». Remarquons aussi qu'il définit I symétrique par rapport à zéro par une implication, c'est à dire par l'inclusion σ(I) $\subset$ I où $\sigma = -Id_R$; le problème réciproque n'est pas abordé.

L'interprétation graphique de l'adjectif symétrique n'est pas explicitée, pourtant quand le professeur dit la définition il précise que $-x$ désigne l'opposé de x : « *si x*

appartient à I, alors son opposé $-x$ appartient à I également » comme il devrait le faire dans le cadre graphique : « si M appartient à I, alors son symétrique M' appartient à I également. » Le professeur cherche-t-il à évoquer la symétrie chez les élèves pour les aider à répondre aux questions ultérieures mais sans l'aborder pour gagner du temps ?

Remarquons encore dans la formulation orale, que le professeur précise « *également* » ce qui signifie que l'intervalle I est le même pour $-x$ que pour x. Peut être craint-il que certains élèves ne réduisent le sens de la définition à « si x décrit un intervalle alors $-x$ décrit lui aussi un intervalle » et non « le même intervalle ». Cette erreur serait fâcheuse puisque la proposition qui en résulte est vraie quel que soit l'intervalle : $-Id_R$ est continue, les intervalles de R sont les connexes de R et l'image continue d'un connexe est connexe.

On remarquera pour terminer l'analyse de cet épisode que la définition n'est pas source de questions, cela correspond bien aux représentations du professeur : une définition mathématique s'accepte telle quelle, pour la comprendre il faut des exemples et des contre-exemples.

Épisode n°2 : l'exemple de R. Les premières fonctions qui viennent à l'esprit à propos de parité sont $(x \mapsto x)$ et $(x \mapsto x^2)$ qui sont définies sur R, pourtant R n'est pas le premier exemple que des élèves indiqueraient comme intervalle symétrique. Pour la progression de la séance, le professeur choisit ici la logique de la discipline plutôt que celle de l'enseignement.

C'est sans doute pourquoi il simplifie la tâche des élèves, la question n'est pas « on va commencer par le plus grand intervalle symétrique » mais « *on va commencer, tiens, par un intervalle, le plus grand que vous connaissiez* ». L'élève qui répond comprend que le professeur attend R mais nous pensons qu'il interprète la demande d'intervalle comme une demande d'écriture propre aux intervalles et nous interprétons ainsi la réponse « $]-\infty\,;+\infty[$ ». Le professeur corrige en reformulant, c'est bien R qu'il attendait. Pour l'argumentation, il pose la question à la classe mais n'attend aucune réponse, R n'étant, à ce niveau, ni construit ni vu comme un groupe additif, les élèves ne peuvent justifier l'existence de l'opposé de tous les réels. On remarquera que le professeur termine par « *moralité* » et non par « conclusion » comme pour indiquer qu'il n'a rien prouvé mais sans l'expliciter pour ne pas entrer dans un débat hors de porté de ses élèves.

Le fait que R soit un intervalle n'est pas mis en valeur ici, le professeur avait certainement annoncé les intervalles en premier pour faciliter la tâche des élèves mais ce choix ne semble pas lui convenir car il aurait en tête non pas les sous-ensembles symétriques les plus simples de R mais les ensembles de définition des fonctions paires ou impaires les plus simples. Une fonction paire ou impaire qui n'est pas définie sur R nous évoque d'abord $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ qui est définie sur R^* , c'est ainsi que nous expliquons pourquoi le professeur propose ensuite R^*.

Épisode n°3 : l'exemple de R^*. Le professeur prend conscience qu'il est en désaccord avec le plan qu'il a annoncé, il l'explicite et dit que cet exemple sera étudié ultérieurement.

La bande vidéo des élèves ne permet pas de voir si le professeur trouve des indices dans la classe pour changer ses plans ou si ses décisions sont prises de façon interne.

Épisode n°4 : l'exemple de [– 3 ; 3].

Dans la première scène, le professeur propose lui même un intervalle symétrique par rapport à zéro. Remarquons qu'il improvise le choix de l'intervalle, comme le montre l'hésitation du discours, et qu'il propose un intervalle fermé. On pourrait, dans un premier temps, trouver ce choix curieux tant il est vrai que dans les ouvrages qui traitent d'analyse, les intervalles sur lesquels les fonctions sont définies sont a priori des intervalles ouverts. Mais deux arguments pédagogiques nous semblent expliquer ce choix. Le premier est qu'en classe de seconde, les fonctions sont souvent définies et continues sur un intervalle fermé afin d'éviter les problèmes de limites. Le second argument en faveur du choix d'un intervalle fermé est sa ressemblance avec un segment (isomorphisme mais aussi notation). On peut penser que le professeur souhaitait évoquer les segments aux élèves : dans le paragraphe suivant, l'analyse détaillée de l'utilisation du tableau au cours de cette scène confirme cette hypothèse.

Quand le professeur annonce l'intervalle choisi, le caractère ouvert ou fermé des bornes de l'intervalle n'est pas précisé oralement, il semble souhaiter ainsi canaliser l'attention des élèves sur le fait que les deux bornes sont opposées. Si l'on compare ce qui est dit et ce qui est écrit, on remarque que la différence (c'est à dire, dans cette scène, ce qui est ajouté par l'écrit) est justement le caractère ouvert ou fermé des bornes de l'intervalle. Tout ce passe comme si, en donnant son exemple, rien qu'en jouant sur les deux modes de communication oral et écrit, le professeur indiquait à la classe, sans l'expliciter, que l'intervalle a ses bornes opposées et qu'elles sont de même type. On retrouve là une caractérisation des intervalles symétriques par rapport à zéro que nous avons énoncée dans l'analyse a priori de la séance mais aussi l'outil que les collégiens utilisent pour apporter la preuve de la symétrie du segment par rapport à un point O : les extrémités sont symétriques par rapport à O.

Dans la deuxième scène, le professeur démarre, sans l'annoncer à la classe, la démonstration de la symétrie de l'intervalle. La première étape est d'écrire la première proposition, $x \in [-3\ ;\ 3]$, de l'implication « $x \in [-3\ ;\ 3] \Rightarrow -x \in [-3\ ;\ 3]$ » qu'il veut faire démontrer. La seconde est de transformer $x \in [-3\ ;\ 3]$ en $-3 \leq x \leq 3$. Sans explication, le professeur transforme l'écriture $[-3\ ;\ 3]$ de présentation de l'intervalle étudié en $x \in [-3\ ;\ 3]$ puis demande aux élèves de traduire cette proposition, il attend la double inégalité annoncée : « *qu'est-ce que ça veut dire que x est un élément de cet intervalle là ?* »

Dans la troisième scène, le professeur n'obtient pas immédiatement de réponse à sa question, les élèves cherchent-ils à expliquer pourquoi l'intervalle est symétrique et se trouvent-ils en contradiction avec la demande de traduction du professeur ? Ou cherchent-ils une relation entre l'explication de la symétrie et la question posée ? Le professeur évite la réflexion des élèves et insiste pour obtenir une réponse en indiquant de façon ironique qu'il n'y a pas de difficulté : « *Oh ben pas tous à la fois hein !* » Il obtient finalement la réponse orale d'un élève : « *x est compris entre -3 et 3* ». Le professeur répète la réponse de l'élève complète le tableau pour obtenir : « $x \in [-3\ ;\ 3] \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leq x \leq 3$ ».

Détaillons l'utilisation du tableau par le professeur sans nous intéresser à l'écriture du signe $\Leftrightarrow$, nous l'étudierons dans la scène suivante. La question posée n'indique pas que la démonstration commence, elle repose pourtant de façon essentielle sur la transformation de l'écriture $x \in [-3\ ;\ 3]$, qui n'est pas utilisable telle quelle pour obtenir $-x \in [-3 ; 3]$, en une écriture efficace qui permet les calculs, ici la multiplication par -1. Mais on sait que la démonstration et ses principes ne sont pas encore acquis en seconde. Nous faisons l'hypothèse que le professeur n'annonce pas la couleur pour écarter les propositions d'arguments de « bon sens » pour expliquer la symétrie de l'intervalle par rapport à zéro ; arguments qu'il devra refuser, ce qui entraînerait une diversion par rapport à l'objectif qu'il s'est fixé, la démonstration. Cette transformation d'écriture est partagée entre le professeur et l'élève qui a répondu : l'élève a traduit oralement l'écriture $x \in [-3 ; 3]$ et le professeur a traduit par écrit la réponse orale de l'élève. Mais l'élève n'a pas dit « -3 est inférieur à x qui est lui-même inférieur à 3 », cette technique de double traduction écrit $\rightarrow$ oral puis oral $\rightarrow$ écrit permet finalement au professeur d'écrire ce qu'il veut obtenir en passant sous silence la difficulté, ce n'est pas l'équivalence des deux écritures qui est difficile mais bien de comprendre la nécessité de la transformation pour répondre aux exigences formelles de la démonstration.

Dans la quatrième scène, le professeur rappelle l'objectif, la démonstration de l'implication « $x \in [-3 ; 3] \Rightarrow -x \in [-3 ; 3]$ ». Le professeur utilise le tableau pour rappeler cet objectif et il insiste par son geste sur le signe $\Rightarrow$ puisque c'est bien lui qu'il montre et non la phrase complète. Il répond de façon implicite par ce geste à une contradiction entre ce qu'il faut démontrer, une implication, et ce qui vient d'être écrit, une équivalence. Pourquoi avoir écrit $\Leftrightarrow$ et non $\Rightarrow$? Le professeur ne voulait pas soulever la difficulté de la nécessaire transformation de $x \in [-3 ; 3]$ en une écriture plus efficace pour démontrer, c'est pourquoi il a demandé « *qu'est-ce que ça signifie…?* » Mais si le mot « signifie » est utilisé dans son enseignement comme synonyme de la locution « est équivalent à » pour permettre des traductions oral $\rightarrow$ écrit, alors l'évitement de cette difficulté entraîne une autre difficulté qui n'était pas prévue, avoir écrit $\Leftrightarrow$ plutôt que $\Rightarrow$. Cette nouvelle difficulté, le professeur va devoir la gérer dans son improvisation ; en pointant le signe $\Rightarrow$, il semble amorcer cette gestion. Oralement, en revanche, la démonstration suit son cours, tel qu'il était prévu, il faut transformer x en $-x$. Dans cette scène le professeur, par la différence entre ce qui est montré au tableau et ce qui est dit, tient deux discours différents de façon simultanée.

Dans la cinquième scène, le professeur obtient de la part d'un élève le moyen de transformer x en $-x$, la multiplication par -1. Mais le fait que la transformation attendue soit algébrique n'est pas évident pour les élèves qui n'ont pas assumé la décision de transformation de $x \in [-3\ ;\ 3]$ en $-3 \leq x \leq 3$. Le professeur ferme la question par trois « aides » successives : il dit « *Pour passer de x à* $-x$ », il montre l'encadrement $-3 \leq x \leq 3$ puis il dit « *justement, on utilise ce qu'on vient de faire* ». Le professeur cumule l'utilisation du discours et celle du tableau pour renforcer le message qui doit faciliter l'action des élèves, il n'attend pas que l'un d'entre eux réponde après chaque « coup de pouce » mais il donne les trois à la fois. On peut penser qu'il cherche ainsi faire avancer le cours avec l'adhésion d'un maximum d'élèves plutôt que de se contenter de la réponse d'un des meilleurs qu'il aurait obtenue sans donner d'indication, les autres devant admettre le résultat sans l'avoir trouvé. On peut penser aussi qu'il insiste sur l'aspect transformation d'écriture pour faire oublier, au moins momentanément, le problème qui n'a pas été traité du signe $\Leftrightarrow$.

Dans la sixième scène, le professeur anime un dialogue entre deux élèves et lui-même pour obtenir la transformation de « $-3 \leq x \leq 3$ » en « $-3 \leq -x \leq 3$ ». Mais une autre transformation était possible et tout aussi efficace puisque la signification est identique : « $-3 \leq x \leq 3$ » en « $3 \geq -x \geq -3$ ». Ces deux transformations correspondent à deux formulations différentes de l'effet d'une multiplication par un nombre négatif sur l'ordre, cet effet étant au programme de la classe de troisième. Les élèves ont pu apprendre une version en langue usuelle de « quels que soient les réels *a, b* et *c,* si c < 0 alors $a \leq b \Rightarrow ac \geq bc$ » ou bien de « quels que soient les réels *a, b* et *c,* si c < 0 alors $a \leq b \Rightarrow bc \leq ac$ ».

La lecture de la transcription du dialogue ne permet pas de savoir quelle transformation les deux élèves proposent car le professeur ne les laisse pas terminer leur phrase. Un geste d'interversion est signalé dans la transcription. On peut interpréter cette information. Le premier élève qui répond dit « *ça change les…* » puis il est coupé par le second. On peut penser qu'il souhaitait dire « ça change les signes » et pas « ça change l'ordre ». Mais de quels signes parle-t-il ? Des signes des nombres qui étaient positifs et qui deviennent négatifs par la multiplication par -1 ou bien des signes d'inégalité qui étaient $\leq$ et deviennent $\geq$ ou encore des deux à la fois ? L'élève se rend compte de l'ambiguïté du mot signe, c'est pourquoi il fait le geste d'interversion, les signes dont il parle seraient donc les signes d'inégalité. L'autre élève dit « *Les réels sont…* » puis il est coupé par le professeur, on peut penser qu'il souhaitait dire « les réels sont inversés ». Les deux élèves procèdent différemment, c'est le professeur qui tranche, il choisit la méthode du second, mais il tranche en donnant apparemment raison aux deux élèves à la fois : « *oui c'est vrai qu'ils viennent à être rangés dans l'ordre contraire* ».

Mais il n'abandonne pas pour autant le premier élève, c'est avec lui que le professeur choisit de continuer ; l'analyse de l'utilisation du tableau permettra de décrire comment le professeur parvient à obtenir avec cet élève la transformation annoncée.

Il pose une question de calcul : « *et* -1 *fois 3 alors ?* » et montre au tableau qu'il commence par le dernier membre de la double inégalité. On n'entend pas, sur la bande vidéo la réponse de l'élève mais on peut penser, compte tenu de ce que le professeur dit ensuite qu'il a répondu à cette question. Le professeur approuve la réponse de l'élève et la répète : « *Bah ça fait* -3*, oui* ». Mais il écrit plus que cette réponse au tableau, il écrit « $-3 \leq$ » c'est à dire qu'il laisse les calculs à la charge de l'élève et que lui se réserve celle de la gestion des signes d'inégalité. Comme on l'a déjà montré par l'analyse du premier épisode où le professeur présente l'intervalle $[-3 ; 3]$, le professeur utilise le discours oral et le tableau pour dissocier deux parties d'un même message et insister sur l'importance de ces deux parties : oralement il indique les calculs et avec le tableau, soit en montrant soit en écrivant, il indique la gestion des inégalités. En répétant cette technique pour x et pour 3, il obtient « $-3 \leq -x \leq 3$ ».

La technique est la même dans le premier épisode et dans cette scène mais la mise en œuvre est différente car l'interaction pédagogique est différente. Dans un cas le professeur donne une information, il décide seul de ce qu'il dit et de ce qu'il écrit ; dans l'autre cas il fait participer la classe, il décide seul de ce qu'il écrit mais l'oral est formulé par un élève en réponse aux questions qu'il a posées. Dans cette improvisation, le professeur décide du degré de fermeture des questions pour trouver un compromis efficace entre la libre réflexion de l'élève, la stabilité du groupe classe et l'objectif à atteindre. Telle est sa marge de manœuvre. Ses options pédagogiques sont, consciemment ou non, à l'origine de sa conduite au sein de cette marge. Dans la dernière scène les questions sont très fermées, l'élève n'exprime pas l'idée qui était la sienne mais celle que l'enseignant lui impose. L'enseignant a choisi cet élève précisément parce qu'il avait une idée différente ; sans doute cherche-t-il à le remettre dans la bonne direction, rappelons-nous ces propos durant l'entretien : « *Il suffit d'exemples pour retenir et d'exercices-types pour comprendre* ».

Dans la septième scène, le problème de la liaison logique entre les deux encadrements « $-3 \leq x \leq 3$ » et « $-3 \leq -x \leq 3$ » est repris. Le professeur avait induit, dans une scène précédente, de travailler par équivalence ce qui va à l'encontre de la propriété de la définition qui n'est qu'une implication. Un double problème peut poser à l'enseignant : premièrement, sachant que certains élèves effectuent des opérations sur les membres d'égalités ou d'inégalités sans se préoccuper des relations logiques, le professeur peut être gêné de ne pas les expliciter à cette occasion ; deuxièmement, il va à l'encontre de nombreuses situations scolaires de demander moins que le maximum d'information et certains élèves risquent de ne pas comprendre qu'on obtienne une équivalence alors que la seule implication est demandée.

Détaillons la technique utilisée par le professeur pour régler ce double problème. Il pose la question « *et qu'est-ce que je mets là entre les deux ?* » tout en montrant les deux inégalités. Les élèves n'ont que deux réponses possibles, implication ou équivalence. Remarquons que les deux réponses sont correctes. Un élève répond équivalent, c'est ce connecteur logique qui avait été écrit à la scène précédente où le problème avait été soulevé. Le professeur avait-il induit cette réponse en n'explicitant pas les propriétés à relier ? On ne peut répondre à cette question mais, le fait que le professeur ne demande aucune justification à l'élève et se contente : « *oui c'est tout à fait équivalent* » laisse à penser qu'il ne voulait pas aborder le problème. En utilisant le tableau pour montrer les encadrements, le professeur a pu poser une question portant sur un acte et non sur le sens de cet acte, il a dit « *et qu'est-ce que je mets là entre les deux ?* » et non « *existe-t-il une relation logique entre le premier encadrement et celui obtenu en multipliant les membres par* -1 *? si oui laquelle ? et pourquoi ?* » Le professeur pense sans doute que la question est trop difficile pour les élèves de cette classe et préfère évacuer le problème sans les heurter. Aussi félicite-t-il celui qui donne la réponse par un « *tout à fait* » et termine en évoquant le sens du connecteur logique, en montrant les deux inégalités et en précisant « *alors je ne l'utilise que dans un sens hein mais en fait il y a équivalence.* »

On peut se demander si le sens évoqué par l'enseignant est bien celui perçu par les élèves : l'enseignant montre les deux encadrements dans le sens de la lecture, dans le sens de l'écriture c'est à dire dans le sens du travail accompli. On ne peut répondre à cette question pour tous les élèves mais on peut remarquer que le professeur n'écrit toujours pas de connecteur logique à ce moment là, ni $\Rightarrow$ ni $\Leftrightarrow$, il a peut-être perçu des indices chez les élèves qui lui font penser qu'il serait prématuré de soulever ce problème.

La huitième scène débute par une réaffirmation de équivalence, le professeur semble perturbé par le choix à faire : ne rien écrire de plus, écrire $\Rightarrow$ ou écrire $\Leftrightarrow$. Mais il doit, pour conclure, transformer l'encadrement obtenu en $-x \in [-3 ; 3]$ et le problème de connecteur logique va se poser une nouvelle fois.

Le professeur dit « *alors il y a équivalence et si* $-x$ *appartient* », il montre $-x$ et -3 puis s'arrête, « *euh non ça y est j'ai donné la réponse* ». De quelle réponse parle-t-il ? En disant « $-x$ appartient » il semble penser à $-x \in [-3 ; 3]$ c'est à dire à la conclusion, on reconnaît bien là une différence entre la recherche de résolution qui n'est pas linéaire et la rédaction de la solution. La réponse qu'il a donnée est que $-x$ appartient lui aussi à l'intervalle décrit par x, il aurait dû le déduire de l'encadrement écrit mais il était confronté au problème de connecteur logique.

Dans la neuvième scène, le professeur effectue un « passage en force » en écrivant le signe $\Leftrightarrow$ qui manquait entre les deux encadrements, on peut penser qu'il sait qu'il a raté ce passage et qu'il préfère conclure tout en retenant la leçon de cette expérience : dans les autres scènes, les connecteurs logiques ne seront plus abordés ni écrits. On peut analyser cet échec par un double conflit recherche-rédaction et oral-écrit. Les étapes de la recherche, telle qu'elle apparaît chez l'enseignant, sont :

- traduction de $x \in [-3 ; 3]$ en $-3 \leq x \leq 3$ qui permet de passer à $-x$,
- passage de $-3 \leq x \leq 3$ à $-3 \leq -x \leq 3$ par la multiplication par -1,
- reconnaissance de $-x \in [-3 ; 3]$ dans l'encadrement $-3 \leq -x \leq 3$.

La validité de la démonstration est assurée par le contrôle des connecteurs logiques, ils sont tous des équivalences donc il peut procéder par implication ; il faut remarquer l'importance du conflit entre le sens de la recherche et celui de l'écriture à la dernière étape : on écrit en dernier $-x \in [-3 ; 3]$ alors que le professeur y pense en premier comme nous l'avons indiqué ci-dessus. Sur cet exemple, le sens des connecteurs logique est le même que celui de l'écriture mais ce n'est bien sûr pas toujours le cas, le professeur, lui, le sait bien…

L'enseignant a eu du mal à improviser sa décision de taire adroitement ces difficultés aux élèves pour donner l'illusion de fluidité de la pensée qui avancerait comme le professeur le montre en écrivant les étapes du raisonnement au tableau…

Dans la dernière scène de cet épisode, le professeur doit aboutir à $-x \in [-3\ ;\ 3]$, il est toujours gêné par ses conflits internes et repart dans le mauvais sens « *dire que* $-x$ *appartient à l'intervalle* $-3\ ;\ 3$ ». Il se reprend et décide de conclure seul, sans poser le problème de la traduction comme il l'avait fait à la deuxième scène où ont pris naissances les problèmes de connecteurs logiques. Le tableau est utilisé ici de façon à atténuer l'importance de l'incident en déplaçant le problème : le professeur dit « *donc cette propriété est vérifiée* », il ne dit pas de quelle propriété il s'agit mais il écrit la proposition «$-x \in [-3\ ;\ 3]$ ». La technique d'utilisation du tableau consiste à séparer le message complet en deux parties, l'une orale et l'autre écrite, elle est utilisée ici pour recibler la réflexion des élèves sur le bon sujet, celui de la conclusion : $-x \in [-3\ ;\ 3]$ donc l'intervalle est symétrique. Mais le professeur reste déstabilisé et la conclusion attendue par l'observateur « $[-3\ ;\ 3]$ est un intervalle symétrique » ne sera pas explicitée.

c. Deuxième séance : fonction croissante, définition et exemple

Le premier quart d'heure de cette séance est consacré à la mise en place de la définition d'une fonction croissante sur un intervalle de R, à montrer sur un graphique les conséquences de cette propriété puis à prendre un exemple parmi les fonctions affines. Nous limiterons l'étude globale aux épisodes I, II et VII qui correspondent à la définition et à l'étude de l'exemple.

Épisode n°1 : Coefficient directeur d'une fonction affine. Le professeur introduit la séance, « *Alors le sens de variation des fonctions, d'abord on part d'un intervalle. Vous voyez c'est très important.* » Il n'est pas certain que les élèves voient effectivement ce qui, dans cette restriction du domaine d'étude, a de l'importance ; le professeur cherche autre chose que ce qu'il exprime. Il souhaite sans doute limiter les exemples que les élèves de la classe pourraient se construire durant cette partie de la séance aux fonctions définies sur un intervalle. Peut-être craint-il qu'un élève propose prématurément, par rapport au déroulement prévu, une fonction comme celle définie sur R* par ($x \mapsto 1/x$).

Dans la suite de cette première intervention, le professeur annonce qu'il va étudier le sens de variation d'une fonction sur un intervalle inclus dans son ensemble de définition. Il pose la question à la classe : « *Alors qu'est-ce que ça veut dire qu'une fonction est croissante sur I ?* » Remarquons que le professeur transforme *sens de variation* en *croissance*, il fait comme si l'étude du sens de variation se limitait à dire si la fonction est croissante ou non sur cet intervalle ; on peut craindre que, durant cette partie de la séance, des élèves pensent qu'une fonction est soit croissante soit décroissante sur l'intervalle. En fait, l'observation de ce qui se passe durant le premier quart d'heure montre que cela n'empêcherait pas ces élèves de suivre ni de répondre aux questions posées et l'on peut penser que le professeur cherche une nouvelle fois à limiter les exemples des élèves aux fonctions monotones. L'examen de la séance complète montre que tout se passe comme si l'enseignant tentait de permettre aux élèves de construire le concept de fonction croissante par l'examen d'exemples de complexité croissante. Au début de la séance, tel un peintre devant une toile blanche, le professeur trace une première esquisse du concept de croissance chez ses élèves par l'examen d'une fonction monotone. Dans la suite de la séance, des exemples nouveaux permettront de mettre à l'épreuve le concept de variation et de l'enrichir, de donner une épaisseur au trait : application affine, ($x \mapsto 1/x$), la fonction indicatrice de Q, une fonction sinusoïdale, ($x \mapsto 2x^2 - x + 1$).

Revenons aux conceptions de l'apprentissage de ce professeur pour interpréter les premiers échanges que nous venons d'étudier. La conception qui semble à l'origine de ses choix rappelle les « petites marches », elle rappelle aussi les étapes « d'assimilation et d'accommodation» de la théorie piagétienne. Il nous semble que le professeur, comme peut-être beaucoup d'enseignants, s'est construit un modèle personnel qui lui permette de fonctionner en recomposant, de façon personnelle et peut-être inconsciente, des théories de l'apprentissage, même contradictoires. Il l'exprime en partie dans l'entretien : « *il y a des pans de cours qu'on a pas assimilés parce qu'on manquait d'exemples. Mais en fait, quand on voit des exemples, on se dit qu'il nous a caché le truc pour qu'on comprenne pas, tout ça pour nous piéger à l'examen.* » ; la vue (l'étude) des exemples permettrait la compréhension car celui qui a le « sens mathématique » trouverait la réponse aux problèmes posés par ces exemples (réponse mathématique mais aussi réponse personnelle par une construction de savoirs efficaces), en termes piagétiens, il y aurait accommodation.

Nous concluons l'examen de ce moment du cours en soulignant, pour les deux séances, l'importance de la conception de l'apprentissage qu'a le professeur dans l'élaboration du scénario « *Il suffit d'exemples pour retenir et d'exercices-types pour comprendre* ». Nous verrons dans la suite de l'analyse comment, alors que le type de scénario est le même dans les deux séances, les choix d'utilisation du tableau sont différents, comme l'a montré l'analyse spécifique de la partie précédente ; nous attribuons cette différence au fait que les élèves des deux classes n'ont pas le même niveau. Il y aurait un scénario commun correspondant aux conceptions de l'enseignement des mathématiques et une animation différente correspondant aux conceptions de l'apprentissage pour adapter le scénario au niveau des élèves.

Le professeur continue : « *Bah normalement vous le savez déjà quand même parce que vous avez étudié les fonctions affines. Est-ce que vous vous souvenez de ça là, du cours de troisième, qu'est-ce que ça peut être qu'une fonction croissante sur un intervalle ?* » Analysons cette question. L'enseignant sait que la variation des fonctions est en dehors du programme de la classe de troisième, nous pouvons le repérer par le choix de la formulation : il ne dit pas « vous savez déjà ce qu'est une fonction croissante » ni « qu'est-ce qu'une fonction croissante ? » mais « *vous le savez déjà quand même* » et « *qu'est ce que ça peut être qu'une fonction croissante ?* » Ainsi le professeur demande aux élèves, dans le contexte des fonctions qu'ils ont déjà étudiées, d'utiliser la connaissance du mot « croissant » qu'ils ont d'après le langage courant ou d'après le langage mathématique déjà étudié (ranger des nombres par ordre croissant) pour deviner ce qu'est une fonction croissante et pour le formuler. La question ne porte pas sur les fonctions affines croissantes mais bien sur les fonctions croissantes en général.

Mais un des élèves répond « *Bah, le coefficient directeur est positif* », il ne tient pas compte de la décontextualisation demandée par le professeur, peut-être parce qu'il n'y arrive pas, peut-être aussi parce qu'il n'a pas compris l'importance de la demande. L'échange qui suit entre le professeur et cet élève montre que l'enseignant ne reprend pas sa demande initiale de généralité, il est prêt à accepter l'étude de la croissance sur le cas particulier (l'exemple) des fonctions affines. Mais l'élève reste, quant à lui, sur son idée de coefficient directeur et n'accède toujours pas au niveau auquel le professeur a accepté implicitement de descendre.

Le professeur prend conscience que l'élève n'a pas compris la question, il ne tente pas de la lui faire comprendre mais souhaite passer à une autre élève qui demande aussi la parole. Il va interrompre l'échange de façon valorisante, l'élève avait raison et il a bien retenu sa leçon : « *tu avais ta fonction affine, oui c'est vrai, quand ton coefficient directeur était positif mais est-ce que tu vois ce que ça signifie ça ? Non ? C'est la chanson qui t'est restée ?(...) Bon bah c'est vrai hein.* » Remarquons néanmoins comment le professeur signale que l'élève ne répond pas à la question, par l'utilisation de possessifs, il lui attribue ce qui ne correspond pas à son attente : « ***tu*** *avais* ***ta*** *fonction (…)* ***ton*** *coefficient (…)* »

Épisode n°2 : Définition d'une fonction croissante.

Dans la première scène, un autre élève est interrogé qui répond de façon à satisfaire l'enseignant « *C'est aussi par rapport à l'image et à l'antécédent, ça veut dire que plus l'image croit, plus l'antécédent croit parce que x a un sens…* » et le professeur le coupe, reprend puis approuve : « *Bon les images croissent dans le même sens que les antécédents. Et bah ça tombe bien c'est la définition…* » On remarquera que, contrairement à la séance précédente, l'enseignant n'a pas cherché à faire travailler l'élève qui ne répondait pas comme il l'attendait mais a pris la bonne réponse proposée par un autre.

Enfin, avant de passer à l'écriture de la définition, le professeur va reprendre l'énoncé de l'élève et le transformer de façon à obtenir une phrase plus proche de celle qu'il va écrire : « *une fonction est croissante quand les images de deux réels quelconques de l'intervalle, ben, sont rangées dans le même ordre que les antécédents.* » On remarque encore une différence importante avec la façon d'introduire la définition des intervalles symétriques par rapport à zéro dans la séance précédente, la définition était imposée directement par écrit par le professeur et était directement suivie de l'étude d'exemples alors que la définition des fonctions croissantes est, dans cette séance, élaborée par étapes successives : la première est que les élèves comprennent grossièrement le sens de la définition, nous verrons que la seconde étape est l'écriture de la définition, la troisième la critique de cette écriture, l'étude d'exemples ne venant qu'après.

Mais l'écriture de la définition n'est pas laissée à l'élève, pourquoi ? pourquoi le professeur ne propose-t-il pas non plus à l'élève de formuler lui-même la définition ? Nous pensons que le professeur ne veut pas prendre le risque de déstabiliser la classe par une réponse trop difficile à gérer : elle pourrait être correcte et ne pas correspondre à la définition institutionnelle[18]. En effet l'élève pourrait proposer, comme d'ailleurs il l'énonce : si $f(x) < f(x')$, alors $x < x'$. Un simple raisonnement par l'absurde permet de retrouver la définition habituelle mais cette manipulation logique est difficile pour les élèves et le professeur sait sans doute qu'une telle proposition pourrait l'empêcher d'atteindre les objectifs qu'il s'était fixés.[19]. Nous percevons bien les limites que l'enseignant fixe à la méthode d'introduction choisie et nous verrons comment, dès qu'il reprend à sa charge l'élaboration de la définition, les élèves n'auront plus l'occasion d'intervenir.

Remarquons aussi que le professeur n'a pas relevé la fin de la phrase de l'élève « *parce que x a un sens* » ; cette remarque est fondamentale et l'observation de la séance complète montre que l'élève qui l'a formulée a souvent des interventions mathématiquement très fines, il formule presque explicitement que la définition de la croissance des fonctions sur un intervalle suppose que l'intervalle soit muni d'une relation d'ordre, il aurait peut-être aussi précisé que l'ensemble des images devait en être muni mais le professeur ne l'a pas laissé terminer sa phrase. Pourtant le mot « ordre » qui n'avait pas été utilisé par l'élève l'a été plusieurs fois par l'enseignant. Mais cet ordre est-il strict ou large ? Tout se passe comme si le professeur, conscient des difficultés causées par la différence entre fonction croissante et fonction strictement croissante, avait décidé de ne pas poser prématurément le problème aux élèves.

Pourtant, cette difficulté qui peut être masquée par le discours oral (on peut dire que x est plus petit que x' sans préciser si $x < x'$ ou si $x \leq x'$) ne peut plus l'être par écrit. Or le professeur, qui a choisi de ne pas partir d'exemples mais de la théorie, va devoir écrire la définition d'une fonction croissante donc écrire $<$ ou $\leq$. Il anticipe la difficulté et l'explicite « *Alors euh, même ordre, ça veut dire quoi ?* » mais il ne la traite pas, il continue « *Si x est plus petit que x'* » et il écrit « si $x < x'$ ». La première scène se termine par cette inscription. Nous interprétons le fait que la remarque de l'élève n'ait

[18] « Soient E et F des ensembles ordonnés dont les relations d'ordre sont toutes les deux notées $\leq$. On dit qu'une application f de E dans F est croissante si, pour tout couple (x, y) d'éléments de E, la relation $x \leq y$ implique la relation $f(x) \leq f(y)$ » c.f. CHAMBADAL (1981), *Dictionnaire de mathématiques,* Paris.

pas été relevée, la question posée sur l'ordre, puis l'absence de réponse à cette question comme le fruit d'une improvisation de l'enseignant qui adapte sa conduite aux objectifs visés avec les contradictions liées à ses choix pédagogiques : enseigner un concept par la confrontation de la définition à l'étude d'exemples.

Dans la seconde scène, le professeur continue l'écriture de la définition. Il a écrit $x < x'$ sans précisions supplémentaires sur x et sur x'. Il sait que la définition est limitée à un intervalle donc qu'il faut préciser l'ensemble parcouru par la variable. Il montre alors x et x' en disant « *qu'est ce que x et x'* ». Il signale en même temps une différence entre les discussions de la vie courante et les débats scientifiques : dans les derniers, les objets sont définis. Une attitude critique en découle, dès qu'un objet mathématique est posé, on vérifie qu'il a bien été défini. Le fait que le professeur montre x et x' doit donc être interprété à deux niveaux différents, il insiste, par le geste, sur la question de la définition de x et de x' mais il montre aussi aux élèves comment ils doivent travailler. À ce second niveau, le professeur fait ce que doit faire l'élève, il joue le rôle d'un élève ; la suite de la phrase le confirme par l'utilisation de la première personne du pluriel « *deux réels de* ***notre*** *intervalle hein ?* ». En même temps qu'il énonce la fin de cette phrase, il commence à écrire « $x \in$ I $x' \in$ I » au-dessus de « si $x < x'$ ». Oralement, le professeur précise le quantificateur « *quelconques* » mais il ne l'écrira pas au tableau.

L'écriture est dynamique puisque ce qui se lit en premier a été écrit en dernier. Le professeur dissocie ainsi les parties du message, il part de ce qui est important pour les élèves dans la première approche de la définition : les images sont rangées dans le même ordre que les antécédents. Il n'insiste pas pour le moment sur la restriction de la définition aux intervalles, l'étude ultérieure de la fonction ($x \mapsto 1/x$) définie sur R* lui permettra d'aborder cette difficulté. Par sa précision, il insiste plutôt sur le fait qu'on doive préciser dans quels ensembles sont choisis x et x' ; il n'éveille pas l'attention des élèves sur le choix d'un intervalle.

Dans la troisième scène, le professeur reprend l'écriture de la troisième partie du message en la plaçant à la suite de la première partie qu'il relit et qu'il montre pour aider les élèves à se repérer : « *et si je les prends rangés dans l'ordre x plus petit que*

---

[19] On pourrait définir la croissance de la fonction f par : pour tout couple (x, y) d'élément de I, la relation *f(y)>f(x) implique la relation y>x.*

x' ». Il doit maintenant écrire l'inégalité des images, une inégalité large alors que pour les antécédents il avait écrit une inégalité stricte. Il dit « *alors, ben, même ordre ça veut dire que f de x est inférieur ou égal à f de x'* » en insistant sur « *ou égal* ». Dans la première partie de la phrase, il répond à la question posée dans la première scène. Il écrit en même temps qu'il parle, il ne pose pas de questions aux élèves. Il dit ce qu'il écrit, cette scène rappelle la scène « magistrale » de la séance précédente où le professeur écrivait la définition des intervalles symétriques par rapport à zéro. Il souhaite ainsi marquer la rupture de contrat avec le début de la séance.

Dans la quatrième scène, l'enseignant justifie cette rupture par une impossibilité de continuer l'élaboration commune de la définition qu'il attribue aux textes des programmes officiels : « *Alors vous n'avez pas tellement de moyens de le savoir que la relation d'ordre c'est inférieur ou égal. Bah parce que vous verrez ça plus tard, on fait plus ça au lycée*. »

Un observateur averti comprend bien que l'argument n'est pas probant et que le professeur lui-même sera conduit à contredire ces propos quand il introduira les fonctions strictement croissantes. Mais l'objectif de l'enseignant n'est pas, à ce moment, d'éclairer le choix de l'inégalité large, il est de convaincre les élèves de la classe que la définition est celle qu'il a écrite au tableau. Dans l'autre classe il a imposé la définition. Dans cette séance, en revanche, il a choisi de faire émerger la définition par une réflexion de la classe, ce qui semble supposer que les élèves étaient capables de la trouver ; nous faisons l'hypothèse que figure dans le contrat didactique à ce moment là que tout problème posé par le professeur aux élèves admet une solution qui puisse être trouvée, au moins partiellement, par les élèves . La compétence du professeur était fondée sur ses capacités à faire faire des mathématiques, elle est mise en cause par l'échec des élèves, pourquoi les a-t-il engagés dans une démarche hors de leur porté ? Le professeur affirme la légitimité de son autorité par le savoir, en posant le problème en des termes que lui seul peut comprendre, implicitement, il dit à la classe « je vous ai conduit au plus loin que vous puissiez aller, les programmes m'empêchent de vous permettre de comprendre la suite, mais vous pouvez me faire confiance, les mathématiques c'est ma spécialité ! ». Il récupère du même coup l'autre part de légitimité de son autorité mis en cause par l'échec des élèves.

Le tableau est utilisé dans cette scène pour renforcer le poids du discours, le professeur entoure le signe « ≤ » en répétant « *la relation d'ordre, c'est inférieur ou égal* ». Il ne signale pas la relation entre « ≤ » et « croissante », on peut penser qu'il attend que l'occasion se présente. Elle se présentera quand il abordera les fonctions strictement croissantes, au quatrième épisode, où le tableau sera utilisé de façon à montrer les relations croissante – inégalité large et strictement croissante – inégalité stricte, le professeur rayera méticuleusement la deuxième barre du signe ≤ entouré durant la scène que nous venons d'aborder : ≤. L'observateur remarquera que cette affirmation de l'autorité de l'enseignant repose sur une contradiction : qu'en est-il alors de l'inégalité dans la relation $x < x'$ écrite juste à côté ? On peut penser qu'il souhaite en terminer avec cette difficulté, passer à autre chose (l'interprétation graphique, par exemple) et revenir plus tard au problème. On remarquera que ce « passage en force » est géré de la même façon que dans la séance précédente à propos de la difficulté de choix entre $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$: il termine seul. L'épisode précédent portait sur l'étude d'un exemple, il porte ici sur l'écriture d'une définition, ce n'est pas ici l'activité mathématique qui détermine l'utilisation du tableau mais la gestion de la classe.

Dans la cinquième scène, le professeur rappelle que l'inégalité « $f(x) \leq f(x')$ » est une inégalité large et il la montre au tableau. Ce geste renforce encore celui de la scène précédente où il avait entouré « ≤ » mais il remet ce signe dans le contexte de l'inégalité. Le professeur, en montrant la proposition globale, insiste sur le fait que c'est dans la relation entre les images qu'il faut écrire « ≤ », il ne signale pas la différence avec la relation entre les antécédents mais il continue sans laisser aux élèves la possibilité de réagir : « *on dit que f est croissante sur I et le symbole aussi c'est une flèche qui monte, croissante sur I…* »

Tout en le disant, le professeur écrit au tableau à côté de l'implication « *f est croissante sur I* ↗ ». Nous interprétons le fait que le professeur écrive au tableau tout en énonçant ce qu'il dit, comme une volonté de montrer à la classe qu'il communique des connaissances à retenir sans proposer aux élèves d'intervenir.

Dans la dernière scène de cet épisode, le professeur dit « *ça va en montant* » en suivant la flèche d'un geste ascendant. Cette scène est une liaison avec l'épisode suivant où le professeur va illustrer graphiquement la croissance d'une fonction. Il prépare les questions qu'il posera aux élèves « alors pourquoi en montant ? », « la courbe monte, ou plutôt ne redescend pas, et pourquoi c'est pas pareil ? ».

Pour conclure cet épisode nous remarquerons que le professeur improvise : il pose une question à la classe, et il part des réponses d'élèves pour aboutir à la conclusion prévue dans le scénario. Il nous semble, dans cet épisode, que l'enseignant, à chaque instant, gère le présent en pensant au futur proche et en tenant compte du passé. Il adapte sa conduite dans le but d'avancer dans le scénario prévu en évitant de perturber trop les élèves par les passages difficiles qu'il n'avait pas prévus d'aborder mais en les perturbant suffisamment par des questions dont la réponse demande réflexion. Le tableau lui permet à la fois de montrer à la classe les éléments importants tant du contenu mathématique que du contrat pédagogique.

Épisode n°7 : Exemple de fonction croissante. Dans les épisodes précédents, le professeur a illustré graphiquement la croissance d'une fonction, il a distingué fonction croissante et fonction strictement croissante et il a fait une remarque sur l'inégalité stricte utilisée dans la relation $x < x'$ de la définition. Il va maintenant passer à l'étude d'un exemple. Une remarque s'impose, toutes ces scènes qui précèdent celle que nous allons analyser avaient pour fonction d'éclairer la définition avant de la confronter à des exemples, ce choix de scénario n'a pas été fait dans la séance avec la seconde A. Deux raisons permettent d'expliquer cette différence : le professeur n'aurait pas jugé les élèves les plus faibles capables d'une réflexion in abstracto ou il n'aurait pas voulu passer trop de temps sur un concept de moindre importance. L'épisode que nous allons étudier correspond, dans le scénario précédent à la première illustration par un exemple de la définition. Dans l'épisode précédent un élève avait proposé la fonction f définie sur R par $f(x) = 4x + 7$ mais sa formulation n'étant pas correcte (confusion entre la fonction et l'image de x par la fonction), le professeur la lui a fait reprendre.

Dans la première scène le professeur note g la fonction qui va être étudiée. Il ne la note pas f comme l'élève l'avait proposé, ce qui est plus traditionnel, et il exprime la raison de ce choix : « *on va l'appeler g pour* changer ». Tout en l'exprimant, il écrit « <u>ex1</u> » au tableau pour indiquer que la fonction qui va être étudiée est le premier exemple puis il écrit « g : ». On remarquera que les élèves n'ont pas eu le choix de la notation, le professeur l'a imposée en disant et en écrivant au tableau de façon simultanée le nom de la fonction.

Dans la seconde scène, le professeur complète l'argumentation de son choix qui, il le sait sans doute très bien, est une contrainte pour les élèves. Ce choix permettrait un gain de liberté : « *sinon on est esclave de la notation hein, on a bien dit faut changer !* ». Puis il demande à la classe de lui rappeler la fonction qui doit être étudiée. La réponse est obtenue dans un brouhaha, le professeur reprend « Ah c'est $4x + 7$ qui l'emporte alors » tout en écrivant « $x \to 4x + 7$ ». Le tableau est utilisé de la même façon qu'à la scène précédente mais, dans celle-ci, ce qui est écrit a pour origine une intervention d'élève. On retrouve ici des exemples de ce que l'analyse spécifique du tableau avait permis de constater : l'écrit et l'oral sont simultanés et l'écriture est linéaire quand le professeur est magistral ou quand il écrit la réponse d'un élève.

Dans la troisième scène, le professeur rappelle que la fonction g est définie et croissante sur R : « *cette fonction elle est définie sur R et elle est croissante sur R ça c'est un souvenir de l'année dernière, bah on va le montrer ».* Apparemment il ne justifie pas la croissance de la fonction par le signe du coefficient de x, pourtant il précise bien que c'est un souvenir de l'année précédente et, en le disant, il montre la définition de la fonction. On peut supposer qu'en montrant cette définition, le professeur souhaite rappeler implicitement que la fonction est affine et que le sens de variation est indiqué par le signe du coefficient de x.

Le professeur, dans la quatrième scène, entame la démonstration de la croissance de g en rappelant que l'on doit commencer par choisir deux réels quelconques de l'intervalle sur lequel la fonction est définie : « *Alors qu'est-ce qu'il faut faire pour ça ? Prendre deux réels donc parce que I là c'est tout R.* » L'intervalle de définition de g n'avait pas été précisé, en disant « *parce que I là c'est tout R* », le professeur écrit « I = R » sous la définition incomplète de g. Doit-on prendre cette nouvelle inscription comme une précision complémentaire ou comme une indication méthodologique ? La première fonction est certainement recherchée mais écrit-on en ce cas I = R ? N'écrit-on pas plutôt R $\to$ R ? Il nous semble que l'inscription correspond aussi à la remarque :

« *parce que I là c'est tout R.* » Le professeur montre la procédure à utiliser pour prouver qu'une fonction est croissante : on repère d'abord l'intervalle de définition de la fonction. On considère ensuite deux réels quelconques x et x' de cet intervalle tels que $x < x'$ et on démontre que $f(x) \leq f(x')$.

C'est ce que le professeur va expliquer dans la cinquième scène, c'est du moins ce qu'attend un observateur averti. En fait, le professeur soulève deux problèmes. Premièrement celui de l'interprétation de la définition et deuxièmement celui du mot quelconque qui est compris par les élèves non pas comme un quantificateur relatif à l'ensemble de la variable mais comme synonyme de « n'importe lequel » au sens absolu. Le professeur dit : « *On prend deux réels. Qu'est-ce qu'on peut choisir comme ordre là ? Bah c'qu'on veut parce que c'qu'il faut c'est regarder si les images sont rangées dans le même ordre ou pas*. » Bien que la définition précise $x < x'$, le professeur n'a pas tort parce que les deux variables jouent des rôles symétriques, la définition peut aussi s'écrire « si $x > x'$, alors $f(x) \geq f(x')$. » Le professeur fait cette précision mais il semble qu'il comprend, compte tenu du fait qu'il ne détaille pas sa pensée, que les élèves ne le suivent pas et il tranche par un argument qui n'est pas d'ordre mathématique : « *Bon, ben, on va pas innover hein.* » En montrant le « $x < x'$ » de la définition, il dit : « *puisque dans la définition on a dit* » puis il cesse de montrer le tableau et continue : « *qu'on choisissait l'ordre x plus petit que x' bon bah on va garder x plus petit que x'.* » Le professeur utilise le tableau pour, nous semble-t-il, illustrer ce qu'il vient de dire. En montrant la définition, il rappelle les choix effectués qui servent de référence commune pour la démonstration ; il cesse de montrer la définition dès qu'il considère le problème présent, celui de cette démonstration. Il conclut cette scène en posant, à la classe, une question qui concerne le quantificateur : « *alors c'est quoi x et x' ?* ».

La sixième scène comprend la réponse à cette question, l'observateur ne sera pas étonné que le professeur y réponde lui-même, l'élève peut penser que le professeur attend une réponse mais il est bien difficile ici de deviner laquelle : doit-on répondre que x et x' sont des nombres réels ? Le professeur semble avoir posé cette question pour attirer l'attention de la classe ; depuis quelque temps, les élèves n'ont pas participé au cours, peut-être l'enseignant juge-t-il souhaitable de dynamiser son discours par une question. Peut-être aussi souhaite-t-il compenser par cette question le fait que la remarque précédente était quelque peu hors de porté des élèves.

La réponse est : « *Et bah c'est deux réels quelconques hein ! Et ben oui, c'est deux réels quelconques.* » Tout élève qui suit le déroulement de la leçon pouvait certainement penser que lui aussi aurait pu le dire, tant la réponse était évidente, et il peut se demander à juste titre pourquoi le professeur insiste tant sur une telle banalité. C'est bien, nous semble-t-il, l'effet recherché par le professeur qui reprend : « *simplement ils ne sont pas si quelconques que ça parce qu'ils sont rangés dans l'ordre x plus petit que x', c'est tout.* » Il y avait donc bien matière à réflexion… Notre étude portant sur l'utilisation du tableau, nous ne poursuivrons pas l'analyse de cette technique où le professeur pose une question d'une apparente simplicité pour mieux attirer l'attention sur une remarque associée à la réponse.

Le professeur répète sa réponse « *Donc x et x' sont deux réels quelconques rangées dans l'ordre* » tout en écrivant au tableau « *x et x' réels* ». On ne manquera pas de remarquer la simultanéité de l'oral et de l'écrit ainsi que la différence entre ce qui est dit et ce qui est inscrit : rangés dans l'ordre. Tout se passe comme si le professeur cherchait une réaction des élèves issue de cette différence, ils termineraient mentalement l'inscription au tableau : « $x < x'$ ».

La septième scène n'est composée que de la fin de l'inscription : « tq $x < x'$ » en même temps que la fin de la phrase énoncée : « tels que x plus petit que x' ».

On remarquera que tout le travail qui vient d'être fait a complètement été occulté dans l'épisode concernant l'étude de l'exemple [− 3 ; 3] avec la classe de seconde A. Le professeur avait directement commencé par demander à la classe de transformer l'écriture $x \in [-3 ; 3]$ sans poser le problème du quantificateur. De plus, le professeur n'avait pas demandé à la classe de préciser l'objectif du travail, il guidait les étapes. Avec cette meilleure classe, au contraire, comme l'étude de la scène suivante va le montrer, il demande aux élèves de préciser l'objectif du travail.

Huitième scène. « *Et qu'est-ce que je veux comparer ?* », la question de l'objectif à atteindre est posée avec une partie de la réponse, on recherche une comparaison. Un élève répond « *f de x et f de x'* », le professeur corrige et approuve :

« *oui mais la fonction on l'a appelée g, vous voyez qu'il faut faire attention. On veut comparer g de x et g de x'.* »

Il complète : « *Alors comment on peut faire pour passer de là à là ?* » en indiquant $x < x'$ et $4x + 7$ au tableau. En montrant ces deux parties, le professeur nous semble vouloir éviter de donner trop d'indications, s'il avait terminé sa phrase il aurait dit : pour passer de $x < x'$ à $4x + 7 < 4x' + 7$ ce qui aurait été plus inducteur. Il a préféré montrer deux parties extraites de l'ensemble dans lequel elles apparaissent pour, nous semble-t-il, insister par le geste sur la recherche de relations entre ces parties.

En comparant avec l'autre classe, on remarque que la question « *comment on peut faire* » avait aussi été posé pour le passage de « $-3 \leq x \leq 3$ » à « $-3 \leq -x \leq 3$ » mais que le professeur avait donné plus d'indication puisqu'il avait terminé sa phrase : « *Comment faire ? Pour passer de x à $-x$? Là on a un encadrement de x, justement on utilise là ce qu'on vient de faire. Oui ?* » On peut interpréter l'utilisation du tableau dans la meilleure classe, au cours de cette scène, comme un moyen de ne pas tout dire pour laisser plus d'initiative aux élèves.

Dans la neuvième scène, un élève, le même que précédemment, prend en charge la démonstration. Il propose qu'on multiplie x et x' par 4 mais c'est le professeur qui indique l'effet de cette multiplication : « *d'accord donc si x plus petit x' on en déduit que 4x plus petit que ? 4x'* » Et, en terminant la phrase, le professeur écrit « $4x < 4x'$. »

On peut remarquer, sur cet exemple, ce que nous avions constaté par l'analyse spécifique du tableau : ce qui est montré peut avoir une double origine, élève et professeur, alors que dans l'autre classe, plus faible, les tâches ne sont pas partagées, soit le professeur explique, soit il pose des questions, soit encore il reformule les réponses mais il ne s'associe jamais à un élève pour répondre à une question posée.

Remarquons que le dit et l'écrit sont simultanés et que l'écriture est linéaire, tout se passe comme si le fait qu'un élève réponde entraîne l'inutilité d'une mise en œuvre pédagogique pour communiquer cette réponse et l'inutilité de donner des explications supplémentaires ; comme si le fait qu'un élève ait construit une procédure qui mène à la réponse suffisait pour conclure que tous les élèves y sont parvenus.

Durant la dixième scène, l'élève continue sa démonstration « *et 4x + 7 inférieur à…* », le professeur le coupe et justifie « *et bah oui, on a le droit de rajouter n'importe* *quoi hein et pourquoi pas 7* » puis, comme sous la dictée, il écrit et il anticipe « *4x + 7 < 4x' + 7* ». L'utilisation du tableau la même que précédemment.

On remarquera que le professeur, contrairement à ce qu'il avait fait dans l'autre classe, ne demande pas la nature des connecteurs logiques. On se rappelle la difficulté qu'il avait éprouvée en écrivant des équivalences alors qu'il pouvait se contenter d'implications. Peut-être l'expérience passée et récente a-t-elle influencé ce choix.

Dans la onzième scène, le professeur demande de terminer la démonstration : « *Oui, et qu'est-ce qu'on trouve ?* » On n'entend pas distinctement de réponse sur la bande vidéo, certains élèves commencent par $f(x)$ d'autres par $g(x)$. Le professeur les coupe et conclut lui-même « *Ben g(x), vous voyez comme vous êtes esclaves de la notation là hein ! On l'avait bien dit, il faut changer de nom tout le temps* » puis il écrit que $g(x)$ est inférieur à $g(x')$.

Dans la douzième scène, le professeur demande à la classe de conclure : « *Et qu'est-ce que ça veut dire ?* » À peine un élève a-t-il répondu « *Elle est croissante* » que le professeur complète « *Strictement même, la fonction est strictement croissante sur R, si on ne dit pas sur quel intervalle elle est croissante et ben on n'a pas tout dit hein ! Croissante toute seule ça m'intéresse pas, ça suffit pas, c'est toujours sur quel intervalle elle est croissante, strictement.* » et il montre le signe < de l'inscription *g(x) < g(x').* Le tableau sert à montrer le pourquoi du strictement, voir suffirait à comprendre…

On remarquera aussi que le professeur respecte la règle du maximum d'information : il ne conclut pas que la fonction est croissante sur R, ce qu'il cherchait à démontrer, mais qu'elle est strictement croissante sur R.

Dans la dernière scène de cet épisode, le professeur reprend la conclusion en explicitant le lien avec le coefficient directeur de la fonction affine : « *Alors vous le savez bien vous que cette droite là, bah elle va en haut donc, et c'est vrai qu' le coefficient directeur, 4, positif* » puis il utilise le tableau en montrant le 4 de $4x + 7$ pour renforcer son commentaire.

IV. BILAN ET PERSPECTIVES

Vient maintenant le moment de dresser un bilan de nos travaux. Nous allons synthétiser les résultats des analyses pour répondre aux questions que nous nous posions sur le tableau : quelles compétences techniques requiert son utilisation, sous quelles conditions et pour quels objectifs sont-elles mobilisées dans le déroulement de la séance ? Nous tenterons de déterminer la portée et les limites de nos résultats. Nous ferons ensuite le point sur la méthodologie adoptée. Nous conclurons, pour répondre à notre préoccupation initiale de formateur, sur la possibilité d'utiliser ce type de résultats en stage de formation initiale des enseignants.

1. Synthèses des résultats obtenus

Nous avons commencé notre recherche en disant que le tableau était un moyen que l'enseignant peut utiliser pour communiquer avec la classe. Nous avons vu que le professeur des deux secondes A et B utilisait effectivement le tableau de façon différente suivant ses objectifs et suivant la classe, mais qu'on pouvait aussi constater des régularités.

11. Les régularités, des indicateurs d'automatismes ?

Nous avons mis en évidence trois types de régularités, le premier regroupe les critères qui concernent « le tableau de l'enseignant », le second ceux qui concernent le langage utilisé au tableau et le troisième ceux qui concernent le partage de l'utilisation du tableau avec la classe.

Le professeur que nous avons observé organise le tableau en différentes colonnes qu'il remplit de gauche à droite en commençant par celle du milieu. Il n'efface que s'il a besoin de place et il n'efface que la partie du tableau qui lui sera utile quitte à laisser des traces incomplètes des épisodes précédents. Le langage utilisé est presque exclusivement le langage mathématique. Le professeur n'a pas envoyé d'élève au tableau et n'a donné aucune consigne par rapport à la prise de note des éléments écrits au tableau.

Ces régularités dépendent peut-être du contenu et du type de séances mais apparemment pas du niveau de la classe. En supposant qu'elles ne changent pas avec le contenu enseigné, on pourrait considérer que ces régularités font partie des automatismes de l'enseignant liés au type de séances (cours, travaux dirigés, module…)

et si l'on trouvait encore des régularités indépendantes du type de séance, on atteindrait ces automatismes.

12. Les variations, des indicateurs d'actes pédagogiques ?

Afin de rendre compte d'une éventuelle volonté pédagogique à travers les variations constatées entre les types de scènes (définition, exemple, méta…) nous avions besoin de quatre types de données : les résultats de l'analyse spécifique du tableau, bien sûr, mais aussi pour mettre en évidence une relation entre ces résultats et une volonté pédagogique, nous avons croisé ces résultats avec des informations sur les conceptions de l'enseignant, une analyse a priori des contenus abordés en tenant compte du scénario et une analyse a posteriori globale de la séance qui permette de formuler des hypothèses sur les décisions de l'enseignant.

Nous avons pu constater que les conceptions de l'enseignement des mathématiques du professeur l'ont conduit, sur deux notions ayant de nombreux points communs, à élaborer deux scénarios assez semblables pour deux classes de niveaux très différents. Nous avons montré que le déroulement des séances est en fait bien différent dans ces deux classes.

Dans l'épisode dont l'objectif est de définir la notion qui va être étudiée, le cours est entièrement magistral dans la classe la plus faible (nous avons coché « professeur à l'origine de ce qui est écrit », « écriture linéaire », « oral et écrit identiques » et oral et écrit simultanés » avec une fréquence de 100% des scènes de l'épisode). Dans la meilleure classe, l'écriture succède à une suite d'interactions visant à l'élaboration, au moins partielle, de la définition par les élèves. La définition est finalement rédigée par le professeur seul, il est donc « à l'origine de ce qui est écrit » dans 100% des scènes de l'épisode mais nous avons coché les autres critères avec une fréquence d'environ 65%.

Dans l'épisode dont l'objectif est de vérifier qu'un exemple satisfait aux critères de la définition, l'activité attendue des élèves n'est pas de produire cette vérification mais de participer à une production commune, orchestrée par le professeur. La réflexion mathématique demandée aux élèves est, par le degré de fermeture des questions posées, décomposée en étapes successives. Ces étapes sont plus courtes et plus nombreuses dans la classe la plus faible, les questions étant assez fermées ; le tableau est utilisé à la fois pour faire avancer le cours et pour marquer les différentes étapes. Avec les meilleurs élèves, les questions sont plus ouvertes et l'élaboration des réponses est plus longue ; le tableau est plus souvent utilisé pour dresser un bilan qui fasse référence, qui serve éventuellement de modèle aux élèves.

Les deux épisodes comparés (Définition et Exemple) permettent de montrer que l'animation du scénario est différente dans les deux classes et que le tableau est utilisé pour contribuer à cette animation. La présence d'une relation entre l'utilisation du tableau et le choix d'animation du scénario en fonction du niveau des élèves est confirmée par les analyses comparées des scènes math et des scènes méta. Bien que la répartition des scènes math et méta soit pratiquement identique dans les deux classes, les fréquences comparées des critères utilisés précédemment montrent qu'il y a plus d'interactions oral/écrit dans les scènes méta et plus encore dans la bonne classe que dans l'autre. En revanche ces interactions diminuent quand ce qui est écrit ou montré au tableau a pour origine l'intervention d'un élève.

13. L'utilisation du tableau, un acte didactique ?

L'analyse spécifique du tableau, durant la séance et les épisodes concernant la définition de la notion étudiée ou ceux concernant l'étude d'un exemple, a montré comment l'utilisation du tableau est un acte pédagogique, c'est-à-dire un acte lié à des décisions du professeur pour avoir le maximum d'efficacité. Mais l'analyse globale, en utilisant l'analyse a priori, a aussi montré que l'utilisation du tableau est intimement liée à son contenu, c'est-à-dire aux mathématiques. Nous confirmons ainsi l'utilité d'une approche de nature didactique pour décrire l'utilisation du tableau. Elle a permis de mettre en évidence différentes utilisations du tableau qu'on retrouve plusieurs fois dans la séance, à l'identique ou éventuellement combinées. Ce double caractère de « modèle étalon » et de « modèle primitif » nous a conduit à appeler ces utilisations des *archétypes* (d'utilisations). À travers les exemples les plus significatifs que nous avons étudiés, nous allons décrire et classer ces archétypes.

a. Archétypes d'émission du professeur vers la classe

Nous regroupons dans cette catégorie les utilisations du tableau par le professeur pour émettre un message à la classe.

Interactions oral / écrit. Nous avons relevé, à l'aide de la grille de recueil de données, les scènes où les messages écrit et oral sont identiques ou différents. L'analyse globale de ces scènes a permis de différencier trois « archétypes d'utilisation du tableau » qui reposent sur la coexistence des deux messages oral et écrit.

– L'oral et l'écrit sont identiques et simultanés.

Cet archétype correspond aux scènes où, semble-t-il, le professeur s'impose à la classe soit pour éviter de perturber les élèves par une difficulté soit, au contraire, pour apporter une contrainte pédagogique à la situation.

Ainsi, le professeur a utilisé cet archétype pour présenter la définition d'un intervalle symétrique par rapport à zéro, il n'est pas parti de proposition d'élèves, voulant, semble-t-il, éviter de passer trop de temps dans l'étude du changement de cadre graphique-numérique pour une notion mineure dans le programme de seconde.

Le professeur a eu recours à cet archétype quand il a décidé d'appeler g la fonction affine croissante proposée par un élève qui l'avait « naturellement » appelée f. Il voulait changer pour, disait-il, éviter une accoutumance néfaste aux mêmes notations.

– Le message oral et le message écrit ont seulement une partie commune.

Nous avons rencontré deux exemples de cet archétype qui est utilisé pour enrichir le discours professoral par la comparaison des deux messages oral et écrit ; le professeur met ainsi en relief ce qui est commun aux deux messages et ce qui est différent.

Dans la scène où le professeur propose d'étudier l'intervalle [– 3 ; 3], le professeur a dit « *l'intervalle – 3 ; 3* » et il a écrit « [– 3 ; 3] ». La différence entre les deux formulations tient à la précision sur les bornes de l'intervalle. Nous avons interprété le choix de cet archétype comme une volonté de laisser implicite mais de signaler qu'un intervalle est symétrique par rapport à zéro si deux conditions, mises en évidence par cet archétype, sont satisfaites : ses bornes sont opposées et toutes les deux comprises ou exclues. Un examen attentif de la bande montre d'ailleurs un geste des mains, que nous n'avions pas repéré au moment de la transcription, qui insiste sur le caractère opposé des bornes de l'intervalle.

De même, beaucoup d'enseignants que nous avons pu observer disent « vecteur u » à chaque fois qu'ils écrivent « $\vec{u}$ » ; ils mettent ainsi en relation le vecteur et la flèche.

On retrouve cette utilisation du tableau dans la scène où le professeur débute la démonstration de la croissance sur R de la fonction (g : $x \mapsto 4x + 7$). Il propose de noter x et x' deux réels tels que $x < x'$ puis de comparer $g(x)$ et $g(x')$. Il dit « *Donc x et x' sont deux réels quelconques rangés dans l'ordre* » tout en écrivant « x et x' réels ». Puis le professeur marque une pause. Nous avons interprété cette différence entre oral et écrit comme une volonté de la part du professeur pour insister sur l'ordre choisi des deux réels en laissant mentalement la possibilité aux élèves de terminer l'écriture du message au tableau.

– <u>Les messages oral et écrit sont disjoints et complémentaires</u> .

Le professeur utilise cet archétype pour donner des indications sur ce qu'il écrit au tableau, pour illustrer ou pour compléter ce qu'il dit en montrant au tableau, ou encore, au contraire, pour éviter de dire quelque chose soit qui perturberait soit qui aiderait les élèves. Il peut aussi accélérer le cours en n'écrivant pas des éléments importants et en se contentant de les dire. Les objectifs nombreux que le professeur peut viser, quand il choisit ce type d'utilisation du tableau, montre que l'acte seul ne suffit pas à interpréter l'intention. L'utilisation d'un *archétype* est au service de principes issus en partie des représentations du professeur. L'*archétype* lui-même n'est pas un révélateur de ces principes.

Une fois que les deux encadrements « $-3 \leq x \leq 3$ » et « $-3 \leq -x \leq 3$ » ont été écrits, le professeur évite aux élèves la difficulté du connecteur logique entre les deux propositions en transformant le problème de logique en une question d'écriture : « *qu'est-ce que je mets là entre les deux ?* »

Dans l'étude de la croissance de la fonction affine, le professeur utilise la même technique mais pour poser le problème aux élèves, la question a changé, ce n'est plus quoi mais comment : « *Alors comment on peut faire pour passer de là à là ?* »

Dans la scène de conclusion de l'étude de l'intervalle, par exemple, le professeur abrège la fin de l'épisode, il montre « $-x \in [-3 ; 3]$ » et dit « *donc la propriété est vérifiée* »

Écritures dynamiques

Avec l'écriture dynamique, le professeur sépare le message écrit en différentes parties, il indique des relations entre ces parties en les écrivant dans un ordre différent de la lecture orale.

Pour définir une fonction croissante le professeur commence par écrire « $x < x'$ » en disant « *qu'est-ce que x et x*' » puis il ajoute, au-dessus de l'inscription précédente, « $x \in I \quad x' \in I$ » en disant « *deux réels de notre intervalle* ».

L'effet de cette écriture dynamique n'est pas persistant. En revanche, quand le professeur raye la seconde barre du signe $\leq$ pour montrer la différence entre fonction croissante et fonction strictement croissante, l'effet de l'écriture dynamique est persistant. Il en est de même des encadrements, soulignements, etc. qui sont rajoutés à ce qui était écrit.

b. Archétype d'interaction professeur / classe

Dans l'activité mathématique, certains gestes consistent à transformer des écritures. Ces transformations s'appuient sur des propriétés qui peuvent, dans le cadre de la classe, être explicitées oralement par le professeur ou par un élève en réponse à une question. Dans le passage de la réponse de l'élève à l'inscription au tableau par le professeur nous avons remarqué certaines transformations implicites qui ont pour objet, soit de passer une difficulté sous silence, soit de soulager la tâche d'un élève. L'utilisation du tableau réalise, en quelque sorte, une synthèse entre un geste mathématique et un geste pédagogique.

Quand le professeur propose de montrer que l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$ est symétrique par rapport à zéro, on a remarqué que le professeur passe sous silence le problème méthodologique de la transformation de « $x \in [-3\ ;\ 3]$ » en « $-3 \leq x \leq 3$ » et demande simplement une traduction de la première écriture ; un élève a traduit et le professeur a écrit ce qu'il souhaitait mais sans respecter précisément la réponse de l'élève.[20]

Pour empêcher un élève de passer « $-3 \leq x \leq 3$ » à « $-3 \leq -x \leq 3$ » en changeant le sens des inégalités, le professeur décompose le travail en tâches

[20] Dans cette scène, le professeur prend en charge le changement de « registre » (au sens de DUVAL), on peut penser que le tableau peut, en certaines occasions, être utilisé pour travailler sur ces changements de « registre ».

élémentaires et ne pose à l'élève que les questions de calculs et écrit, à chaque réponse numérique, le signe d'inégalité qu'il attendait.

En conclusion, les archétypes que nous avons mis en évidence sont des constructions du professeur que nous avons observé et qui structurent son activité au tableau. Les observations que nous avons pu faire par ailleurs nous laissent penser que ces constructions personnelles sont communes à de nombreux enseignants. Notre recherche est limitée aux archétypes du professeur que nous avons étudié dans ces séances. Elle trouve en ceci une première limite.

2. Le tableau noir, un outil pour la classe

Le tableau est à la charge du professeur et toujours sous sa responsabilité ; il peut choisir d'y envoyer un élève. Le fait que le tableau soit un intermédiaire entre le l'enseignant et la classe, c'est-à-dire un médiateur de certaines relations pédagogiques, nous a conduit à comparer l'utilisation du tableau pendant la classe à une activité utilisant un instrument. Nous sommes donc posés la question de savoir ce qu'est un instrument ou un outil et comment les ergonomes décrives de telles activités.

P. Rabardel[21], définit un « artefact » comme un objet matériel ou symbolique fabriqué, cette définition se réfère à l'anthropologie qui définit un artefact comme une *chose* ayant subi une transformation *humaine*. Il précise[22] :

> *« Chaque artefact a été conçu pour produire une classe d'effet et sa mise en œuvre dans les conditions prévues par les concepteurs permet d'actualiser ces effets. Autrement dit, à chaque artefact correspondent des possibilités de transformation des objets de l'activité qui ont été anticipées, délibérément recherchées et qui sont susceptibles de d'actualiser dans l'usage. En ce sens l'artefact (qu'il soit matériel ou non) concrétise une solution à un problème ou à une classe de problèmes socialement posés. »*

Les ergonomes distinguent le sujet, l'objet et l'instrument. P. Rabardel précise[23]

> *« Dans la plupart des conceptualisations c'est l'artefact qui est considéré de façon explicite ou implicite comme l'instrument. Nous proposons d'élargir ce point de vue et de considérer l'instrument comme une entité*

---

[21] P. RABARDEL (1995), *Les hommes et les technologies : approche cognitive des instruments,* A. Colin, Paris.
[22] Op. Cit. p. 60
[23] Op. Cit. p. 11

mixte qui tient à la fois du sujet et de l'artefact. L'instrument comprend dans cette perspective : un artefact matériel ou symbolique produit par l'utilisateur ou par d'autres, un ou des schèmes d'utilisation associés résultat d'une construction propre ou de l'appropriation de schèmes sociaux préexistants. »

et définit une situation d'action instrumentée comme l'ensemble des interactions entre les trois pôles sujet, objet et instrument[24] :

« Au-delà des interactions directes sujet-objet, de multiples autres interactions peuvent être considérées :
– les interactions entre le sujet et l'instrument,
– les interactions entre l'instrument et l'objet sur lequel il permet d'agir,
– les relations sujet-objet médiatisées par l'instrument. »

La différence que les ergonomes font entre un outil et un instrument est la suivante : les outils sont « les instruments sans fonctionnement propre. »[25]

Si l'on considère l'interrelation professeur-tableau-élève, une question se pose, le tableau est-il un outil pour la classe de mathématiques ? Nous entendons ici par « outil » l'objet matériel et les pratiques des enseignants expérimentés. Cette question est importante si l'on pense à la formation des professeurs débutants : si la réponse est positive, l'acquisition d'une bonne connaissance de cet outil fait partie du processus de professionnalisation du stagiaire.

Le tableau est bien un « artefact », il est conçu par des spécialistes qui ont prévu de répondre à une classe de problèmes dont nous n'avons abordé qu'un élément : l'écriture. Mais à bien observer un tableau, on remarque qu'il n'est plus noir. La surface a été étudiée pour permettre une écriture et un effaçage aisés, une partie peut être quadrillée, des panneaux qui se replient ont l'autre face blanche, ce qui permet la rétroprojection, le haut du tableau est équipé de crochets mobiles destinés à accrocher des cartes ou des panneaux.

Aucune de ces utilisations possibles, écriture et effaçage exceptés, n'a été actualisée par le professeur que nous avons observé. Néanmoins, pour l'utilisation que ce professeur a du tableau, nous avons mis en évidence des archétypes qui correspondent à une construction du sujet dans son interrelation à l'artefact. L'analyse globale, par sa précision, a permis de montrer à quels problèmes les différentes utilisations du tableau permettent, pour cet enseignant, de répondre. En considérant cet

[24] Op. Cit. p. 11
[25] Op. Cit.

ensemble, le tableau est donc bien un instrument. Comme il n'a pas de fonctionnement propre, nous pouvons conclure que le tableau est un outil pour la classe de mathématique de ce professeur.

3. Le point sur la méthodologie

Nous avions mis au point une méthodologie spécifique au problème que nous nous posions sur les pratiques des enseignants en mathématiques à propos du tableau. Nous nous proposons de faire le point sur les qualités et les insuffisances de cette méthodologie.

Nous nous sommes imposés une délimitation du sujet : un professeur et deux séances sur deux notions proches avec deux classes de niveau différent. La méthodologie repose sur le recueil d'informations (entretiens enregistrés et deux séances filmées), la transformation des bandes vidéo en un texte écrit, l'élaboration d'une grille de recueil d'informations quantifiables sur le tableau, le découpage des séances en épisodes et en scènes, une analyse a priori des contenus en tenant compte du scénario du professeur et deux types d'analyse a posteriori, une analyse quantitative spécifique du tableau utilisant la grille et une analyse globale d'épisodes choisis après l'analyse spécifique.

Cette méthodologie est très lourde en regard de la durée étudiée : deux quarts d'heure pour l'analyse spécifique, à peine dix minutes pour l'analyse globale. Cette durée très courte limite à la fois la quantité d'archétypes d'utilisations du tableau que nous avons pu observer mais aussi, pour chacun d'entre eux, elle limite la diversité de leurs mises en acte. Néanmoins, si l'on considère cette recherche comme un début d'analyse de ces pratiques, il faudra reconnaître qu'il était nécessaire d'approfondir l'étude comme nous l'avons fait pour percevoir, avec la précision atteinte, les utilisations mais aussi les problèmes que les utilisations diverses permettent de résoudre pour ce professeur. Nous avons pu montrer que le mode de résolution d'un problème est, pour cet enseignant, dépendant du niveau des élèves et que, de même que l'utilisation d'un outil dépend du problème posé, l'utilisation du tableau dépend de la classe.

Malgré l'apparente précision des résultats obtenus, nous nous devons de les relativiser en tenant compte de plusieurs biais liés à la méthodologie. On sait que la présence d'un observateur et de deux cameramen modifie le milieu étudié. Nous avons interrogé l'enseignant et les élèves après les séances pour qu'ils nous disent s'ils avaient perçu des changements par rapport à l'expérience mutuelle qu'ils ont des autres cours. Nous n'avons rien obtenu d'autre que des indices permettant de conclure à l'absence d'effet de l'observation mais nous restons prudents.

À cette modification éventuelle du milieu étudié, il nous faut ajouter que nous avons observé à de nombreuses reprises la bande vidéo et non la classe elle-même. Bien que nous ayons bénéficié de la compétence de techniciens très qualifiés pour ce type d'enregistrement, le champ visuel d'une caméra est très inférieur au champ oculaire, l'action paraît concentré autour du personnage filmé. Les techniciens appellent cela un effet de halo. La conséquence évidente est que nous perdons pratiquement toute possibilité d'accéder aux indices venant des élèves que le professeur perçoit et qui ont une influence sur sa conduite de la classe. Une autre conséquence, malgré l'existence d'une bande vidéo des élèves, est que l'on perçoit peu d'information sur ce que reçoivent les élèves, sur ce qu'ils font, sur ce qu'ils écrivent. Comme le professeur n'a pas donné de consigne par rapport à la prise de note, il aurait été intéressant de pouvoir consulter les feuilles de brouillons et les cahiers des élèves : pour les mêmes inscriptions au tableau, quelle diversité sur les notes ? Une méthode d'analyse des traces des élèves reste à élaborer.

La transcription des images successives du tableau nous a permis d'accéder à son évolution, l'insertion de ces images dans le texte a permis l'analyse globale et de comprendre les problèmes que l'utilisation du tableau permettait de résoudre. Toutefois, dans cette analyse, nous avons parfois consacré plus d'une page à une situation dont la durée est inférieure à cinq secondes. La transcription fixe le fugitif. Ce que nous observons sur la transcription, les descriptions que nous en faisons, les hypothèses que nous élaborons et les conclusions que nous en tirons demandent souvent une attention très longue sur des actes professionnels qui ont une portée de très courte durée. Finalement, nous risquons de déformer la situation à laquelle le professeur est confronté et pour laquelle il élabore des réponses.

Le découpage de la séance en épisodes a permis d'isoler des unités d'interactions pédagogiques relativement autonomes et de comparer des unités portant sur des contenus semblables (les épisodes *définition* et les épisodes *exemple*). Mais ces unités ont une autonomie beaucoup moins grande pour l'enseignant que pour l'observateur. L'enseignant travaille avec les acquis du passé, les indices de l'action présente et en préparation de situations à venir[26]. Pour les élèves qui n'ont pas les mêmes capacités mathématiques que l'observateur pour décoder la séance, il n'est pas certain que les unités soient aussi bien délimitées pour un élève que pour l'observateur qui utilise la transcription, il n'est pas certain non plus que les élèves aient perçu les mêmes limites pour ces unités.

Le découpage des épisodes en scènes a permis d'atteindre avec précision l'évolution du tableau et les interactions oral/écrit grâce auxquelles nous avons pu définir l'écriture dynamique ainsi que plusieurs archétypes d'utilisation du tableau. Mais ces scènes ne sont pas liées à la durée et cela pose un problème quand nous comparons des unités qui ont des durées allant de deux secondes à deux minutes. Le professeur que nous avons observé n'a jamais laissé les élèves chercher longtemps et il utilise relativement souvent le tableau, ceci explique le défaut de la méthodologie que nous avons mise au point pour cette recherche et que le recul nous permet de constater. Il faudrait, pour un éventuel complément de recherche, un chronométrage précis des épisodes (durée de chaque utilisation du tableau et durée de chaque scène) pour restituer cette dimension fondamentale de l'enseignement : le temps.

Si un prolongement de cette recherche devait être mené, il nous semble qu'il faudrait, dans un premier temps, chercher à repérer d'autres archétypes au cours d'une observation prolongée et portant sur plusieurs enseignants. En intégrant à la grille de recueil de données les archétypes et une liste de problèmes qu'ils permettent de résoudre, liste qui reste à élaborer, nous pourrions étendre la recherche à un échantillon plus vaste d'enseignants et de types de séances, ce qui permettrait d'élaborer une typologie plus complète des archétypes d'utilisation du tableau et de leurs combinaisons, et de mieux définir les classes de problèmes qu'ils permettent de résoudre en précisant ce qui est commun à différents enseignants. On pourrait songer aussi à déterminer des « modes d'utilisation du tableau », c'est-à-dire des ensembles d'archétypes communs à certaines catégories de professeurs (catégories restant à définir) pour résoudre une certaine classe de problèmes.

On pourrait envisager aussi d'étudier les techniques que les professeurs mettent en œuvre pour enseigner des « gestes » spécifiques aux mathématiques comme les transformations d'écriture ou les changements de registre. Nous n'avons pas abordé ces techniques car nous n'avons rencontré qu'un de ces « gestes » dans les séances que

[26] C.f. F.V. TOCHON, Op. Cit.

nous avons étudiées[27]. Des séances d'enseignement des méthodes de développements et de factorisations nous sembleraient a priori intéressantes, pour étudier les techniques que les enseignants utilisent pour enseigner ces transformations d'écriture : soulignement fonctionnel des facteurs communs ou des facteurs du double produit, flèches de développement, couleur… Des séances d'enseignement de calcul vectoriel permettraient d'étudier des changements de registre : notation $\vec{u}$, notation $\overrightarrow{AB}$, coordonnées en ligne (x ; y) ou en colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$…

4. Retour aux préoccupations initiales de formateur

Quels savoirs avons-nous construits ? Nous sommes partis d'une préoccupation de formateur que nous avons transformée en problématique de recherche. Les savoirs que cette recherche a permis d'élaborer sont des savoirs descriptifs qui, s'ils étaient complétés comme nous l'avons présenté précédemment, permettraient d'aboutir à une nomenclature des utilisations du tableau précisant les variables professeur, archétype et problème.

Ces savoirs sont-ils utilisables tels quels en formation, sur le terrain ou en IUFM ? En ce qui nous concerne, en tant que formateur, il est clair que nous n'observerons plus un tableau en cours de mathématiques comme nous pouvions le faire avant cette recherche. Mais en tant qu'enseignant, l'acquisition de ces nouvelles connaissances n'a pas modifié nos pratiques. Le problème de l'utilisation de ces savoirs pour la formation des enseignants débutants reste pour nous entier. Une « transposition didactique » de ces savoirs pour élaborer des situations de formation est-elle nécessaire ? Et pour quelles situations de formation ?

Notre travail a consisté à mettre au point une méthodologie qui permette de rendre compte des pratiques professionnelles d'utilisation du tableau noir en classe de mathématiques. Nous avons réussi à en repérer et à en décrire quelques unes, nous avons montré qu'elles consistaient en une « mise en acte » d'archétypes pour répondre à certains problèmes et, en particulier, qu'elles pouvaient dépendre, pour l'enseignant

[27] C.f. le changement de registre « $x \in [-3 ; 3]$ » → « $-3 \leq x \leq 3$ » que le professeur a pris en charge seul.

observé, du niveau des élèves de la classe. Mais nous préférons rester prudents sur la possibilité et l'intérêt d'utiliser tels quels ces savoirs pour la formation ainsi que sur le travail restant à accomplir pour mettre en place des situations qui permettraient d'avoir une influence sur ces pratiques professionnelles en construction des enseignants débutants.

BIBLIOGRAPHIE

ALTET M., BRESSOUX P., BRU M., LAMBERT C. (1994), *Une étude exploratoire des pratiques d'enseignement en classe de CE2*, Les dossiers d'éducation et formations n°44, Ministère de l'Éducation nationale Direction de l'Évaluation et de la Prospective.

APMEP (1992), *Évaluation des programmes de Mathématiques seconde 1991*, publication n°88, Paris.

AUDOIN M.C. (1996), *Formation professionnelle initiale en mathématiques : tuteurs et stagiaires en collège et lycée.* Document de travail pour la formation des enseignants n°16, IREM de PARIS VII.

CHAMBADAL (1981), *Dictionnaire de mathématiques,* Paris.

CHEVALLARD Y. (1990), « Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique », *I.M.A.G.* n°122, Université Joseph Fourier-Grenoble I.

CHIOCCA C.M., JOSSE E., ROBERT A. (1992), *Analyse du discours des enseignants*, Cahier de DIDIREM n° 16, Université Paris 7.

POSTIC M. et DE KETELE J-M. (1988), *Observer des situations éducatives*, Paris, PUF.

RABARDEL P. (1995), *Les hommes et les technologies : approche cognitive des instruments,* A. Colin, Paris.

ROBERT A. (1996), *Une approche de la formation professionnelle initiale des futurs enseignants de lycée et collège en mathématiques : un essai de didactique professionnelle.* Cahier DIDIREM n°26, IREM de PARIS VII.

ROBERT A. (1996), « IUFM : Réflexion sur la formation professionnelle initiale des futurs enseignants de mathématiques des lycées et collèges ». *Repères-IREM* n°23.

TOCHON F. V. (1993), *L'enseignant expert*, Nathan, Paris.

VALIRON (1947), *Théorie des fonctions*, Masson, Paris.

TABLE DES ANNEXES

A. TRANSCRIPTION DES BANDES VIDÉO : LÉGENDE

◆ Qui parle :

– [P] indique que ce qui suit est dit par le professeur ;

– [E] indique que ce qui suit est dit par un élève ;

– [E=] indique que c'est le même élève que précédemment qui intervient ;

– le double soulignement indique deux propos énoncés simultanément ;

– les points de suspensions sont utilisés quand une phrase n'est pas terminée parce que la parole a été coupée mais ils seront mis entre parenthèses si le professeur ne finit pas sa phrase et attend la suite de la part d'un élève de la classe ;

– entre parenthèses et en script sont indiquées des précisions gestuelles concernant celui qui parle.

◆ La parole et le tableau :

– Le soulignement indique ce qui est dit en écrivant au tableau ;

– l'italique indique ce qui est dit en montrant quelque chose au tableau ;

◆ Le tableau :

– L'encadrement indique ce qui est écrit au tableau, la disposition générale étant globalement respectée, et, en gras, apparaît ce qui est nouveau quand c'est écrit dans le sens de la lecture, sinon plusieurs encadrements successifs indiquent l'ordre chronologique de l'écriture.

– Les inscriptions présentes au tableau ne sont pas à chaque fois répétées. Les « effaçages » sont signalés : même si les inscriptions ne sont pas toutes répétées, elles sont présentes.

– Quand le professeur efface ce qui est effacé apparaît tramé.

Transcription de la bande vidéo de la classe de seconde A

– [P] Bon, allez, on y est, alors d'abord on va commencer par définir ce que c'est qu'un ensemble symétrique par rapport à zéro. On va donner des exemples parce qu'on va en avoir besoin pour les définitions après. Alors là vous écoutez seulement puisque vous avez déjà le début du cours, hein ? Alors on va commencer par un intervalle, après on prendra des réunions d'intervalles. Alors on dira qu'un intervalle qu'on va baptiser I, hein c'est original, heu voilà ce que ça veut dire qu'il est symétrique par rapport à zéro ; ça veut dire que si x appartient à I, alors son opposé $-x$ est élément de I également.

Si $x \in$ I, alors $-x \in$ I

Alors d'abord on va commencer, tiens, par un intervalle, le plus grand que vous connaissiez (…)

– [E] moins l'infini…

– [P] ben R tout simplement R , alors est-ce que je peux dire que l'opposé d'un réel est un réel ? Oui, n'importe quel réel a un opposé dans R ; moralité, voilà un ensemble *qui vérifie cette propriété là.*

(Il montre la propriété au tableau).

R ça va, maintenant, je vais retirer zéro, R*, alors, c'est plus un intervalle ça, donc c'est pas une bonne idée puisque j'ai dit qu'on allait commencer par un intervalle.

On va plutôt prendre – 3, 3 *(il écrit)*

Si $x \in$ I, alors $-x \in$ I

[–3 ; 3]

(Il montre l'intervalle) Qu'est-ce que ça veut dire que x est un élément de cet intervalle là ? (Il écrit)

Si $x \in I$, alors $-x \in I$
$\boldsymbol{x} \in [-3\ ;\ 3]$

Qu'est-ce que ça signifie ça ?

Oh ben pas tous à la fois hein !

– [E] x est compris entre -3 et 3.

– [P] Oui, on a le droit de lever la main aujourd'hui aussi hein. x est compris entre – 3 et 3, oui, *(il écrit)*

Si $x \in I$, alors $-x \in I$
$x \in [-3\ ;\ 3] \Leftrightarrow \boldsymbol{-3 \leq x \leq 3}$

Bon, qu'est-ce que je cherche à démontrer ? *Ça, je regarde si cette propriété est vérifiée ou pas hein (il montre la définition et pointe le « alors »).* Alors on voudrait bien montrer que son opposé, c'est à dire $-x$ appartient aussi à cet intervalle là, comment faire ?

Pour passer de x à $-x$? *Là on a un encadrement de x,* justement on utilise là ce qu'on vient de faire. Oui ?

– [E] On multiplie par -1.

– [P] Oui et alors ? si tu multiplies par -1 qu'est ce qu'il se passe ?

– [E=] Ça change les… *(gestes d'interversion)*

– [E] Les réels sont…

– Oui c'est vrai qu'ils viennent à être rangés dans l'ordre contraire, *et – 1 fois 3 alors ? (il pointe le 3 de $x \leq 3$).* Bah ça fait – 3 <u>oui</u> *(il écrit $-3 \leq$)*, <u>$-x$ oui</u> *(il écrit $-x\leq$), et – 3 fois 1 (il montre le – 3 du premier $-3 \leq$)* <u>bah ça fait 3.</u>

$x \in [-3\ ;\ 3] \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$
$\boldsymbol{-3 \leq -x \leq 3}$

Et qu'est ce que je mets là entre les deux (il montre les deux inégalités) là ?

– [E] Équivalent.

– [P] oui c'est tout à fait équivalent, alors je ne l'utilise que dans un sens hein parce que *je cherche à partir de là et à arriver là mais en fait il y a équivalence (il montre les deux inégalités l'une après l'autre).*

Alors il y a équivalence et si $-x$ *appartient (il montre* $-x$ *et* -3*)*, euh non ça y est j'ai donné la réponse,

(il écrit le second signe ⇔ et montre la seconde inégalité)

$$x \in [-3\ ;\ 3] \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$$
$$\Leftrightarrow$$
$$-3 \leq -x \leq 3$$

parce que (il montre la deuxième inégalité) dire que $-x$ appartient à l'intervalle -3 ; 3, j'avais commencé à le dire hein, <u>donc cette propriété est vérifiée.</u>

$$x \in [-3\ ;\ 3] \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$$
$$\Leftrightarrow$$
$$-3 \leq -x \leq 3$$
$$\boldsymbol{-x \in [-3\ ;\ 3]}$$

Alors maintenant je vais changer un peu tiens, <u>qu'est ce qu'on va prendre comme intervalle ?</u>

$$-x \in [-3\ ;\ 3]$$
$$\boldsymbol{x \in}$$

Et bien on va prendre presque le même, <u>on va prendre l'intervalle -3 ; 3 mais ce coup ci ça va être ouvert en 3,</u>

$$-x \in [-3\ ;\ 3]$$
$$x \in \boldsymbol{[-3\ ;\ 3[}$$

alors qu'est-ce que ça veut dire ? (…) Oui ?

– [E] Ça veut -3 est plus petit ou égal à $-x$ qui est strictement inférieur à 3.

– [P] Oui mais alors il vaut mieux quand même le dire en français hein, on dit inférieur ou égal parce que autrement tu dis plus petit que, égal à, c'est pour ça que ça va pas (il prend de la craie de couleur) mais enfin ce que tu dis, ton intervalle il quand même c'est vrai, *c'est à dire que là* *(il montre le signe* $\leq$ *de* $-3 \leq x \leq 3$*) qu'est ce qui va se passer, c'est strict ; et alors* *(il écrit en couleur)*

$$x \in [-3\ ;\ 3[\qquad \mathbf{-3 \leq x < 3}$$

quand on va simplifier par -1*, qu'est ce qui va se passer ?*

– [E=] Et ben on doit changer, ça va changer le signe mais ça va être euh, enfin euh…

– [E] Ouais.

– [P] Changer le sens ? C'est ça que tu voulais dire ? Changer le sens et alors $-x$ *(toujours en couleur)*

$$x \in [-3\ ;\ 3[\qquad -3 \leq x < 3$$
$$\mathbf{-x}$$

est compris entre (…)

Est-ce que ici x peut être égal à trois ? (il montre le 3 de l'inégalité)

– [E] Non.

– [P] Non, donc $-x$ pourra pas être égal à…

– [E] à -3

– [P] à -3 *(il continue en couleur)*

$$x \in [-3\ ;\ 3[\qquad -3 \leq x < 3$$
$$\mathbf{-3} < -x$$

Puisque *x ici pouvait être égal à* -3 *(il montre le* -3 *de la première inégalité)* et bien maintenant…

– [E] $-x$ pourra être…

– [P] $-x$ pourra être égal à 3

$x\in[-3\,;\,3[\qquad -3\leq x<3$ $-3<-x\leq \mathbf{3}$

et vous voyez que ce coup ci, $-x$ *il appartient aussi à l'intervalle semi-ouvert* $-3\,;\,3$ *(il montre le* $-x$*),* <u>mais ce n'est pas du même côté</u> *(toujours en couleur)*

$x\in[-3\,;\,3[\qquad -3\leq x<3$ $-3<-x\leq 3$ $]-3\,;\,3]$

<u>donc là, la propriété n'est pas vérifiée</u>

$x\in[-3\,;\,3[\qquad -3\leq x<3$ $-3<-x\leq 3$ $\boldsymbol{-x}\in]-3\,;\,3]$

parce que $-x$ appartient à l'intervalle $-3\,;\,3$ *donc* $-x$ *n'appartient pas forcément à celui-là (il montre l'intervalle* $[-3\,;\,3[$ *).* Alors y a pas grand chose *d'écart hein y avait juste 3 (il montre le 3 de l'intervalle* $[-3\,;\,3[$ *)* ben ça suffit pour que la *propriété (il montre l'intervalle de la définition)* soit pas vérifiée, pourtant y avait pas grand chose d'écart.

Alors parfois d'ailleurs pour montrer que la propriété est pas vérifiée qu'est-ce qui suffit de faire ? *Parce que là il faut montrer que c'est vrai tout le temps (il montre l'inégalité* $-3\leq x\leq 3$*)* mais pour montrer que c'est pas vérifié bah il suffit de montrer que c'est faux une seule fois c'est à dire de trouver un réel de l'intervalle avec son opposé qui n'appartient pas à l'intervalle.

C'est aussi ce qui se passe par exemple avec un intervalle, disons de réels positifs, <u>j'prends l'intervalle 0 ; 2</u> *(il change de colonne et il écrit en blanc)*

Si $x\in\mathrm{I}$, alors $-x\in\mathrm{I}\qquad\qquad$ **[0 ; 2]**

ouvert, fermé peu importe, *tous (brièvement, il montre de loin l'intervalle)* les réels sont là-dedans, ils sont positifs alors j'peux prendre n'importe lequel comment sera son opposé ?

– [E] négatif…

– [P] il sera négatif donc *il risque pas d'appartenir à l'intervalle* *(il montre l'intervalle)*.

Alors il suffit d'en trouver un seul, ça suffit, bon, par exemple on va prendre

Si $x \in$ I, alors $-x \in$ I	**I** = [0 ; 2]

le réel 1 *(il montre l'intervalle)*, ou plutôt 1,2 tiens ! Pour que vous pensiez pas qu'il n'y a que des entiers comme nombres hein ?

Si $x \in$ I, alors $-x \in$ I	I = [0 ; 2]
	1,2

On prend le réel 1,2

Si $x \in$ I, alors $-x \in$ I	I = [0 ; 2]
	$\boldsymbol{x}$ **=** 1,2

$-x$ c'est – 1,2, c'est un nombre négatif, ça n'appartient pas à I, ça y est c'est fini:

Si $x \in$ I, alors $-x \in$ I	I = [0 ; 2]
	x = 1,2
	$\boldsymbol{-x = -1{,}2 \notin \mathrm{I}}$

je suis sûr que *tous les opposés n'appartiennent pas à l'ensemble* *(il montre l'intervalle* [0 ; 2]*)* mais il suffit en fait, *enfin, sauf zéro* *(il montre zéro)* mais il suffit d'en trouver un seul pour que la propriété soit pas vérifiée donc c'est plus facile de montrer que quelque chose est faux que de montrer que c'est vrai, il suffit de montrer que c'est faux une fois.

Alors maintenant on va pas prendre un seul intervalle, on peut prendre une réunion d'intervalles et justement tout à l'heure j'en ai parlé un petit peu en disant qu'on va prendre R* *(il cherche des traces de cet épisode au tableau puis se retourne).*

R* c’est quoi déjà ?

– [E] *(inaudible)*

– [P] Oui c’est R privé de zéro, alors on a p’t être intérêt à l’écrire comme réunion d’intervalle

R* =	Si $x \in I$, alors $-x \in I$	$I = [0 ; 2]$
	$x \in [-3 ; 3] \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$	$x = 1{,}2$

C’est à dire l’écrire moins l’infini, zéro ouvert union zéro plus l’infini.

R* = **$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$**	Si $x \in I$, alors $-x \in I$	$I = [0 ; 2]$
	$x \in [-3 ; 3] \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$	$x = 1{,}2$

Alors qu’est-ce que vous en pensez de cette propriété là, elle va être vérifiée ou pas *(il encadre la définition de l’intervalle symétrique)*

R* = $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$	$\boxed{\text{Si } x \in I, \text{ alors } -x \in I}$	$I = [0 ; 2]$
	$x \in [-3 ; 3] \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$	$x = 1{,}2$

quand on prend R* ? (…)

Vous n’avez pas d’opinion ? (…)

– [E] Oui, elle, ça marche.

– [P] Oui, alors pourquoi elle est vérifiée ?

– [E=] Parce que un réel, il peut être, là, négatif que quand l’opposé il est pas négatif…

– [P] Oui, alors toi tu dis, oui c’est une bonne idée, à chaque fois qu’on va prendre un réel dans un intervalle, son opposé il va se trouver dans l’autre. Oui on peut dire aussi que si x est différent de zéro, parce que appartenir à R* c’est être différent de zéro, $-x$, bah sera différent de zéro, l’opposé, mais c’est vrai que chaque fois qu’on va prendre un réel dans *l’un des intervalles son opposé va être dans l’autre (il montre les intervalles* $]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$*)*.

Donc ça va être vérifié.

Bah maintenant au lieu de retirer zéro, bah je vais retirer 1 *(il écrit)*

$\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$	$\boxed{\text{Si } x\in I, \text{ alors } -x\in I}$	$I = [0\,;2]$
R \ {1}	$x\in[-3\,;3] \Leftrightarrow -3\leq x \leq 3$	$x = 1{,}2$

Maintenant je retire 1. Alors, a-t-on un ensemble symétrique par rapport à zéro ou pas ? (…)

Alors y a deux manières d'écrire ça. Ou bien j'écris comme <u>la réunion des intervalles</u> *(il écrit =)*

$\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$	$\boxed{\text{Si } x\in I, \text{ alors } -x\in I}$	$I = [0\,;2]$
R \ {1} =	$x\in[-3\,;3] \Leftrightarrow -3\leq x \leq 3$	$x = 1{,}2$

Ou bien je dis que x est différent de 1, ça signifie que x différent de 1 *(il montre R \ {1} puis transforme le signe = en ⇔)*

$\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$	$\boxed{\text{Si } x\in I, \text{ alors } -x\in I}$	$I = [0\,;2]$
R \ {1} ⇔	$x\in[-3\,;3] \Leftrightarrow -3\leq x \leq 3$	$x = 1{,}2$

Alors ça signifie, dire que *(il efface le signe ⇔)*

$\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$	$\boxed{\text{Si } x\in I, \text{ alors } -x\in I}$	$I = [0\,;2]$
R \ {1} ⇔	$x\in[-3\,;3] \Leftrightarrow -3\leq x \leq 3$	$x = 1{,}2$

Enfin on va plutôt dire <u>*x* élément de R moins 1 ;</u>

$\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$	$\boxed{\text{Si } x\in I, \text{ alors } -x\in I}$	$I = [0\,;2]$
$x\in$R \ {1}	$x\in[-3\,;3] \Leftrightarrow -3\leq x \leq 3$	$x = 1{,}2$

alors <u>signifie ;</u>

$\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$	$\boxed{\text{Si } x\in I, \text{ alors } -x\in I}$	$I = [0\,;2]$
$x\in$R \ {1} signifie	$x\in[-3\,;3] \Leftrightarrow -3\leq x \leq 3$	$x = 1{,}2$

alors j'écris en français mais c'est toujours le même signe d'équivalence hein, signifie quoi ? Oui bien x différent de 1 ;

$R^* =]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$	$\boxed{\text{Si } x\in I, \text{ alors } -x\in I}$	$I = [0\,;2]$
$x\in R\setminus\{1\}$ signifie $x\neq 1$	$x\in[-3\,;3] \Leftrightarrow -3\leq x\leq 3$	$x = 1{,}2$

c'est encore plus facile, qu'est-ce qu'on peut dire de $-x$? (…)

Bon on va pas l'écrire comme ça. *(Il efface* $x\neq 1$*)*

$R^* =]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$	$\boxed{\text{Si } x\in I, \text{ alors } -x\in I}$	$I = [0\,;2]$
$x\in R\setminus\{1\}$ signifie $x\neq 1$	$x\in[-3\,;3] \Leftrightarrow -3\leq x\leq 3$	$x = 1{,}2$

Alors on va écrire que x appartient à moins l'infini 1 union 1 plus l'infini et puis on va effacer l'autre parce que ça se chevauche.

$R^* =]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$	$\boxed{\text{Si } x\in I, \text{ alors } -x\in I}$	$I = [0\,;2]$
$x\in R\setminus\{1\}$ signifie $x\neq 1$	$x\in[-3\,;3] \Leftrightarrow -3\leq x\leq 3$	$x = 1{,}2$
	$\Leftrightarrow$	$-x = -1{,}2 \notin I$
	$-3\leq -x\leq 3$	
	$-x\in[-3\,;3]$	
	$x\in[-3\,;3[$ $\quad -3\leq x< 3$	
	$-3< -x\leq 3$	
	$-x\in]-3\,;3]$	

Voilà ! *(il écrit ensuite)*

$R^* =]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$	$\boxed{\text{Si } x\in I, \text{ alors } -x\in I}$	$I = [0\,;2]$
$x\in R\setminus\{1\}$ signifie $\mathbf{x \in]-\infty\,;\ 1[\cup]1\,;+\infty[}$		$x = 1{,}2$
		$-x = -1{,}2 \notin I$

Alors, il a pas plus de succès écrit comme ça !? Alors allons y *(il donne trois de petits coups de craies sur le tableau sous le 1 de l'intervalle* $]-\infty\,;1[$ *).*

Quand je prends un réel qui appartient à cet interva… à cet ensemble là, soit à un intervalle soit à un autre, qu'est-ce que l'on peut dire de son opposé ? Est-ce qu'il est toujours dedans ? (…) Oui ?

– [E] On prend -1…

– [P] Ah si j'prends −1 *est-ce qu'il est là dedans ?* *(il montre les deux intervalles réunis)* Oui pourquoi ? <u>Il va se trouver là −1</u> *(il dessine une flèche pour indiquer la position de -1)*

<u>et il est plus petit que 1</u> *(il écrit -1 sous la flèche)*

$R^* =]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$	$\boxed{\text{Si } x\in I, \text{ alors } -x\in I}$	$I = [0\,;2]$
$x\in R \setminus \{1\}$ signifie $x\in\,]-\infty\,; \underset{\substack{\uparrow\\ \mathbf{-1}}}{}\ 1[\cup]1\,;+\infty[$		$x = 1{,}2$
		$-x = -1{,}2 \notin I$

et l'opposé de −1…

– [E] C'est 1

– [P] Et bah c'est 1 donc *il n'appartient pas* *(il donne un petit coup de craie sur le 1 de l'intervalle*]1 ; +∞[*) à cet ensemble* R *privé de* 1 *(de loin, il montre le début de la ligne)* .

Transcription de la bande vidéo de la classe de seconde B

– [P] Alors le sens de variation des fonctions, d'abord on part d'un intervalle. Vous voyez c'est très important. On a pris un intervalle inclus dans l'ensemble de définition. Bon, alors, on va étudier le sens de variation de cette fonction sur, donc, un intervalle inclus dans l'ensemble de définition. Alors qu'est ce ça veut dire qu'une fonction est croissante sur I ? Bah normalement vous le savez quand même déjà parce que vous avez étudié les fonctions affines. Est-ce que vous vous souvenez de ça là, du cours de troisième, qu'est ce que ça peut être une fonction croissante sur un intervalle ?

– [E] Bah, le coefficient directeur est positif.

– [P] Ah le coefficient directeur, c'est à condition que tu aies donc…

– [E=] l'équation…

– [P] l'équation d'une droite alors. Quand t'as l'équation d'une droite, tu avais ta fonction affine, oui c'est vrai, quand ton coefficient directeur était positif mais est-ce que tu vois ce que ça signifie ça ? (…) Non ? C'est la chanson qui t'est restée ?

– [E=] Oui…

– [P] Coefficient directeur positif fonction croissante. Bon bah c'est vrai hein. Oui c'est…

– [E] C'est aussi par rapport à l'image et à l'antécédent, ça veut dire que plus l'image croît plus l'antécédent croît parce que x a un sens…

– [P] Ah. Tu veux dire…

– [E=] Plus l'un est grand l'autre est grand.

– [P] Bon les images croissent dans le même sens que les antécédents. Et bah justement ça tombe bien c'est la définition… *(rires d'élèves)* On dira tout simplement qu'une fonction est croissante quand les images de deux réels quelconques de l'intervalle, ben, sont rangées dans le même ordre que les antécédents. Alors euh, même ordre ça veut dire quoi ? <u>Si x est plus petit que x'</u>

si $x < x'$

qu'est-ce que x et x' (il montre x et x') deux réels de notre intervalle hein ? quelconques ;

$x \in I$ $x' \in I$
si $x < x'$

et si je les prends rangés dans l'ordre x plus petit que x' (il montre l'inégalité) alors, ben, même ordre ça veut dire que f de *x* est inférieur ou égal à f de *x' (il insiste sur « ou égal »)*.

$x \in I$ $x' \in I$
si $x < x'$ **alors** $\boldsymbol{f(x) \leq f(x')}$

Alors vous n'avez pas tellement le moyen de le savoir que la relation d'ordre c'est inférieur ou égal. Bah parce que vous verrez ça plus tard, on fait plus ça au lycée. La relation d'ordre c'est inférieur ou égal *(il entoure le signe de l'inégalité)*.

$x \in I$ $x' \in I$
si $x < x'$ alors $f(x) \leq f(x')$

C'est pas inférieur strictement hein. *f de x, donc, inférieur ou égal à f de x' (il montre l'inégalité),* on dit que f est croissante sur I et le symbole, aussi, c'est une flèche qui monte, croissante sur I,

$x \in I$ $x' \in I$
si $x < x'$ alors $f(x) \leq f(x')$ ***f* est croissante sur I ↗**

ça va en montant (il fait un geste montant en suivant la flèche).

Alors pourquoi en montant ? Bah c'est quand on regarde la représentation graphique : si on prend *x* plus petit que *x'*, comme l'axe des abscisses est orienté dans le sens gauche droite *qu'est-ce qu'on pourrait dire des images si f de x est plus petit que f* *de x', ça veut dire que le point de coordonnées x, f de x (il montre l'inégalité des images)…*

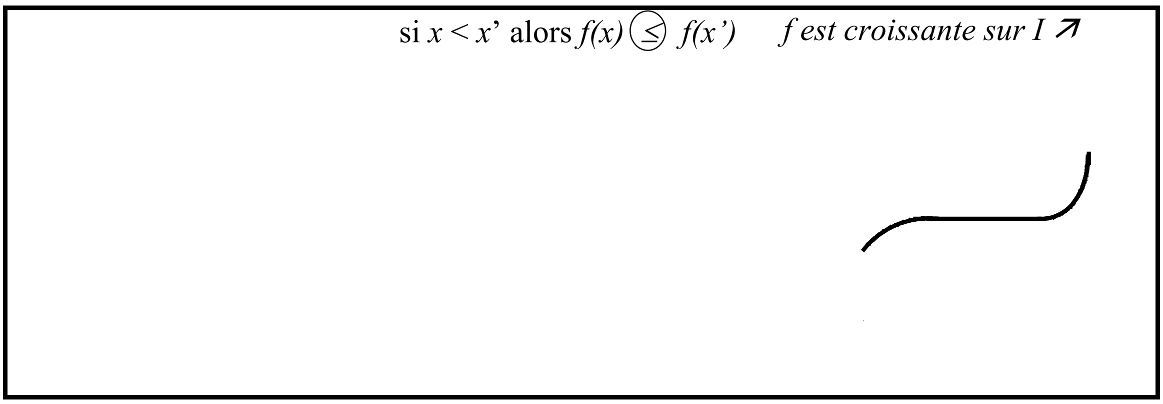
– [E] Sera plus bas…

– [P] Oui, va être en dessous du point de coordonnées *x*' f de *x*' et ça, ça va être, et *x* va varier dans tout l'intervalle alors on a l'impression que la courbe monte, ou plutôt ne redescend pas, et pourquoi c'est pas pareil ?

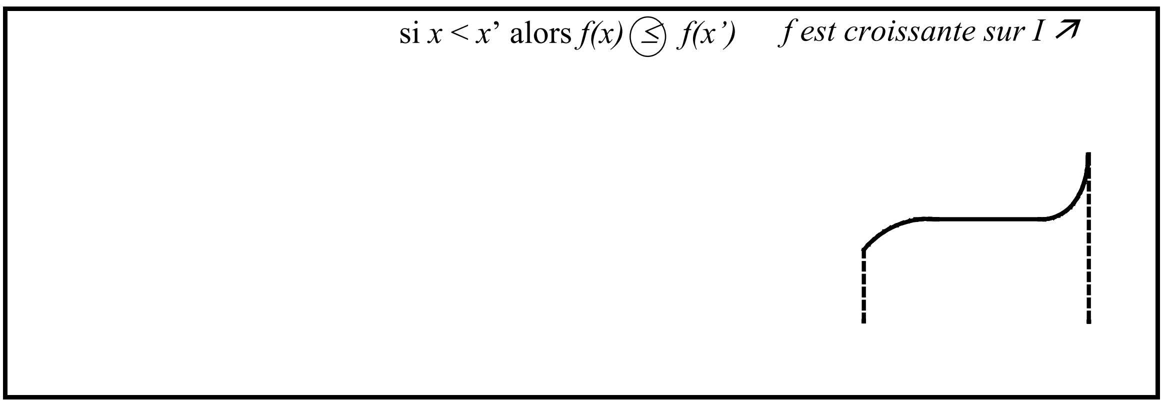
– [E] Ça stagne…

– [E] Ça peut rester au même niveau.

– [P] Ah bah voilà ! il peut y avoir tout un intervalle sur lequel la fonction est constante voilà *(il trace la courbe)*

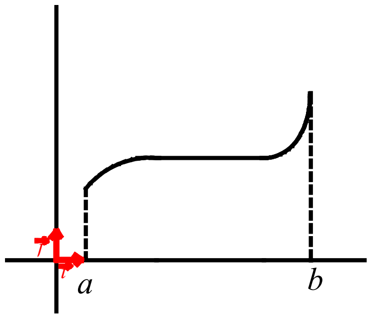


et ben là si j'ai une représentation graphique sur cet intervalle là, qu'a à peu près cette tête là hein *(il trace les pointillés)*



bon bah alors pour parler de représentation graphique bah il faut qu'y ait un repère parce que sinon ça n'a pas de sens hein, bah on va prendre n'importe quoi, il y a pas de formule là mais il faut quand même des repères alors sur cet intervalle petit a petit b *(il trace les axes de coordonnées et, en rouge, les vecteurs du repère puis, toujours en rouge, il écrit $\vec{i}$, $\vec{j}$, a, et b)*

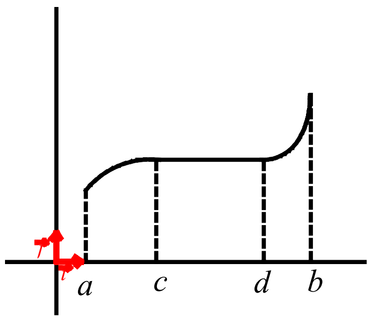
si $x < x'$ alors $f(x) \leq f(x')$ *f est croissante sur I* ↗



on peut dire que la fonction est croissante (il suit du doigt la courbe de gauche à droite).

Elle est croissante mais il y a tout un sous-intervalle, vous voyez, celui-là entre je sais pas mais disons ces deux valeurs là, on va continuer dans l'ordre alphabétique c, d *(il trace les pointillés en blanc et écrit c et d)*

si $x < x'$ alors $f(x) \leq f(x')$ *f est croissante sur I* ↗

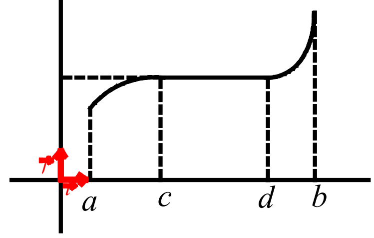


et bien entre ces deux valeurs (il indique c et d)

et bien la fonction est constante *(il repasse la partie horizontale de la courbe)*, voilà !

Cette constante c'est elle là, *(il trace les pointillés horizontaux)*

si $x < x'$ alors $f(x) \leq f(x')$ *f est croissante sur I* ↗



ici au tableau ce serait à peu près quoi ?

– [E] Trois

– [P] Oui, oui c'est cela oui, environ *(il regarde la courbe au tableau).*

Alors là, on a l'exemple d'une fonction croissante sur I, (il montre la courbe).

Alors c'est assez rare d'ailleurs d'avoir des courbes de ce style là c'est à dire avec une fonction qui est constante sur une partie de l'intervalle comme ça, la plupart du temps, *ça va être strictement rangé dans le même ordre (il montre le signe inférieur ou égal entouré)*

c'est à dire que là <u>je vais pouvoir retirer ce signe d'égalité.</u> *(il barre en rouge la deuxième barre du signe ≤ comme indiqué : ce que nous noterons ≤)*

Et à ce moment là, *si on a toujours f de x plus petit que f de x' (il montre l'inégalité des images rendue stricte)* on dira que la fonction est strictement croissante tout simplement. Ce sera presque toujours le cas : fonction strictement croissante. Alors y a pas vraiment de signe pour ça, *la flèche qui monte c'est croissant (il montre la flèche qui monte après croissante sur I)*. Bah strictement croissante on l'écrit en français hein, c'est pas interdit. Donc sur I, hein, on est toujours croissant sur un intervalle. Alors ça peut être un très grand intervalle, c'est ce qui vous est arrivé l'année dernière avec les fonctions affines. Et oui elles étaient, ces fonctions elles pouvaient très bien être croissante sur R tout entier et d'ailleurs elles pouvaient aussi être décroissantes sur R tout entier ou alors constantes, sur R. Oh c'était pas drôle hein, c'était monotone, les fonctions affines, toujours le même sens de variation ! Bah au moins ce sera plus intéressant cette année !

Alors après, ah oui au fait, pourquoi j'ai pas mis égal *là, pourquoi j'me suis pas amusé à prendre x égal à x' ? (il montre le signe inférieur strict de « si x < x'»)*

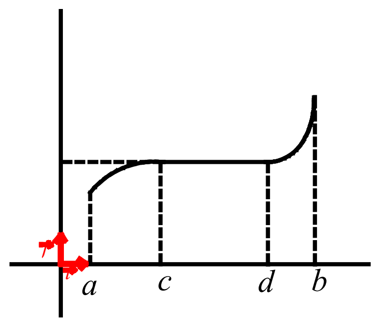
– [E ensemble confus] <u>Ça aurait été…égalité…</u>

– [P] Ah bah oui ! À ce moment là j'aurai toujours f de x égal f de x', ça j'peux prédire le résultat. C'est pas intéressant, non. C'qu'est intéressant c'est de regarder comment sont rangées les images de deux réels distincts, ça c'est bien vrai.

Alors on continue. Un p'tit exemple. On a déjà vu tout à l'heure les fonctions affines à coefficients directeurs positifs ; bon, on va en reprendre un pour se remettre en mémoire. *(il écrit)*

si $x < x'$ alors $f(x) \leq f(x')$ *f est croissante sur I* ↗

ex1



Oh j'sais pas si j'en ai pris un là ! *(il regarde ses notes sur son bureau)* Ça c'était le cours d'l'année dernière, bah non, y en a pas, on n'avait pas pris de fonction affine, et ben ça fait rien, on va en r'prendre quand même une aujourd'hui.

Alors, un exemple de fonction affine à coefficient directeur positif (…) Un peu d'imagination (…) Alors, une main levée ou plusieurs (…)

– [E] *(Cécile lève la main et attend).*

– [P] Oh bah c'est pas toujours Cécile !

– [E ensemble] Bah si ! *(rires)*

– [P] Et ben alors tu vas être filmée tout le temps…

– [E] Alors j'arrête de parler *(rire)*…

– [P] Allez, va-s-y !

– [E=] y égal, par exemple, enfin y égal 4x plus 7…

– [P] alors ça c'est l'équation de la droite, la fonction…

– [E=] f de x égal…

– [P] Ah…

– [E=] donc f de x égal…

– [P] t’es en train de donner un nombre *(il prend un air mystérieux).* Alors essaie d’arranger ça. Justement on avait bien insisté sur les généralités en disant attention, attention, la fonction c’est f, f de *x* c’est l’image du réel *x* par la fonction.

– [E=] f égal, euh…

– [P] Bah dis donc t’as pas d’chance, ils veulent pas t’aider hein. Ils te laissent te dépatouiller toute seule !

– [E] Oui, f associe à *x*, 4*x*…

– [P] Ah bah là ça va mieux. Ou alors tu dis la fonction f définie par l’image d’un réel quelconque f de *x* égal, et tu pourrais dire c’que t’as dit tout à l’heure.

<u>Alors ben tiens on va l’appeler *g* pour changer</u>

<u>ex1</u> ***g* :**

parce que sinon on est esclave de la notation hein, on a bien dit faut changer ! Alors à *x* on fait correspondre quoi déjà ? (…)

– [E ensemble] brouhaha…

– [P] <u>Ah c’est 4*x* + 7 qui l’emporte alors</u>

$x \in$ I $x' \in$ I si $x < x'$ alors $f(x) \le f(x')$ <u>ex1</u> $g : \boldsymbol{x} \longrightarrow \mathbf{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{7}$

Alors, *cette fonction elle est définie sur* R *et elle est croissante sur* R *ça c’est un souvenir de l’année dernière, bah on va le montrer* *(il montre la définition de g).*

Alors qu’est-ce qu’il faut faire pour ça ? Prendre deux réels donc *parce que I là* *(il montre les I de la définition)* <u>c’est tout R</u>

si $x < x'$ alors $f(x) \le f(x')$ <u>ex1</u> $g : x \longrightarrow 4x + 7$ I = R

On prend deux réels. Qu’est-ce qu’on peut choisir comme ordre là ? Bah c’qu’on veut parce c’qu’il faut c’est regarder si les images sont rangées dans le même ordre ou pas donc j’peux les prendre dans l’ordre que j’veux. Bon, ben, on va pas innover hein, *puisque dans la définition on a dit (il montre $x<x'$)* qu'on choisissait l'ordre x plus petit que x' bon bah on va garder x plus petit que x' ; alors c'est quoi x et x' ? (…)

Et bah c'est deux réels quelconques hein ! Et ben oui, c'est deux réels quelconques ; simplement ils sont pas si quelconques que ça parce qu'ils sont rangés dans l'ordre x plus petit que x', c'est tout. <u>Donc x et x' réels quelconques rangés dans l'ordre</u>

I = R **x et x' réels**

<u>tels que x plus petit que x'</u>

<u>ex1</u> $g : x \longrightarrow 4x + 7$ I = R x et x' réels tq $x < x'$

Et qu'est-ce que j'veux comparer ?

– [E] f de x et f de x'.

– [P] Oui mais la fonction on l'a appelée g, vous voyez qu'il faut faire attention. On veut comparer g de x et g de x'.

Alors comment on peut faire pour passer de là à là (il montre $x < x'$ et $4x + 7$)

Je sais que x est plus petit que x' et j'aimerais bien savoir dans quel ordre sont rangés g de x et g de x'.

Ah bah tiens, elle est toute seule dans la classe là aujourd'hui ! Alors tu fais quoi ?

– [E] On multiplie.

– [P] On multiplie quoi par quoi ?

– [E=] Bah, x et x' par 4…

– [P] par 4, alors multiplions par 4, quand on multiplie donc par un nombre positif on change pas l'ordre, d'accord donc si *x est plus petit que x' (il montre x et x')* on en déduit que <u>$4x$ plus petit que ? $4x'$</u>

x et x' réels tq $x < x'$

$$4x < 4x'$$

– [E= et d'autres] $4x'$

– [E=] et $4x + 7$…

– [P] et bah oui, on a le droit d'ajouter n'importe quoi hein, pourquoi pas 7. Et on arrive à quoi alors ?

– [E=] $4x + 7$ inférieur à…

$$\begin{array}{c} x \text{ et } x' \text{ réels tq } x < x' \\ 4x < 4x' \\ 4x + 7 < 4x' + 7 \end{array}$$

– [P] Oui et qu'est ce qu'on trouve ?

– [E= et d'autres] f de x ; g de x

– [P] Ben g de x vous voyez comme vous êtes esclaves de la notation là hein !

$$\begin{array}{c} 4x + 7 < 4x' + 7 \\ g(x) < \end{array}$$

On l'avait pourtant dit, il faut changer de nom tout le temps, bien faire attention.

$$\begin{array}{c} 4x + 7 < 4x' + 7 \\ g(x) < g(x') \end{array}$$

Et qu'est-ce que ça veut dire ?

– [E] Elle est croissante…

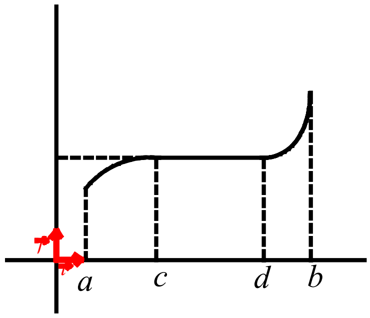
– [P] Strictement même, la fonction est strictement croissante sur R , si on ne dit pas sur quel intervalle elle est croissante et ben on n'a pas tout dit hein ! Croissante toute seule ça m'intéresse pas, ça suffit pas, c'est toujours sur quel intervalle elle est croissante, *strictement (il montre < de $g(x)<g(x')$).*

Alors vous l'savez bien vous que cette droite là, bah elle va en *haut donc, et c'est vrai qu'le coefficient directeur, 4, positif (il montre le 4 de $4x + 7$)*

Rappel de la totalité du tableau :

$x \in I \quad x' \in I$

si $x < x'$ alors $f(x) \leq f(x')$ $\qquad$ *f est croissante sur I* ↗



<u>ex1</u> $\quad g : x \longrightarrow 4x + 7$

$I = R$

x et x' réels tq $x < x'$

$$4x < 4x'$$

$$4x + 7 < 4x' + 7$$

$$g(x) < g(x')$$

B. ÉPISODES ET SCÈNES DES DEUX SÉANCES

PREMIÈRE SÉANCE

Épisode I *(p. 89, l. 6-15):* Définition d'un intervalle symétrique

Épisode II *(p. 89, l. 16-22):* L'exemple de R

Épisode III *(p. 89, l. 23-24) :* L'exemple de R*

Épisode IV *(p. 89, l. 25 - p.91, l.14) :* L'exemple de [-3 ; 3]

scène I	*p. 89, l. 25-27*
scène II	*p. 90, l.1-4*
scène III	*p. 90, l. 5-11*
scène IV	*p. 90, l.12-15*
scène V	*p. 90, l. 16-17*
scène VI	*p. 90, l. 18-26*
scène VII	*p. 91, l. 1-5*
scène VIII	*p. 91, l. 6-7*
scène IX	*p. 91, l. 8-10*
scène X	*p. 91, l. 11-14*

Épisode V *(p. 91, l. 15– p. 93, l. 18)* *:* L'exemple de [-3 ; 3[

scène I	*p. 91, l. 15-18*
scène II	*p. 91, l. 19-22*
scène III	*p. 91, l.23 - p. 92, l. 7*
scène IV	*p. 92, l. 8-16*
scène V	*p. 92, l. 17-23*
scène VI	*p. 92, l.24 - p. 93, l. 1*
scène VII	*p. 93, l. 2-5*
scène VIII	*p. 93, l. 6-8*
scène IX	*p. 93, l. 9-13*
scène X	*p. 93, l.14-18*

Épisode VI *(p. 93, l. 19 - p. 94, l. 17-22) :* L'exemple de [0 ; 2]

scène I	*p. 93, l. 19-22*
scène II	*p. 93, l. 23 - p. 94, l. 2*
scène III	*p. 94, l. 3-5*
scène IV	*p. 94, l. 6-9*
scène V	*p. 94, l. 9-12*
scène VI	*p. 94, l. 13-16*
scène VII	*p. 94, l. 17-22*

Épisode VII *(p. 94, l. 23 - p. 95, l. 25) :* L'exemple de R*

scène I	*p. 94, l. 23 - p. 95, l. 5*
scène II	*p. 95, l. 6-8*
scène III	*p. 95, l.9-12*
scène IV	*p. 95, l. 13-25*

Épisode VIII *(p. 95, l. 26 - p. 98, l. 7) :* L'exemple de R \ {1}

scène I	*p. 95, l. 26 - p. 96, l. 2*
scène II	*p. 96, l. 3-8*
scène III	*p. 96, l. 9-12*
scène IV	*p. 96, l. 13-21*
scène V	*p. 96, l. 21 - p. 97, l. 4*
scène VI	*p. 97, l. 5-12*
scène VII	*p. 97, l. 13-14*
scène VIII	*p. 97, l. 15-16*
scène IX	*p. 97, l. 17 - p. 98, l. 6*
scène X	*p. 98, l.7-11*

DEUXÈME SÉANCE

Épisode I *(p. 99, l. 5-20) :* Coefficient directeur d'une fonction affine

Épisode II *(p. 99, l. 21 - p. 100, l. 21) :* Définition d'une fonction croissante

scène I	*p. 99, l. 21 - p. 100, l. 1*
scène II	*p. 100, l. 2-5*
scène III	*p. 100, l. 6-10*
scène IV	*p. 100, l. 11-15*
scène V	*p. 100, l. 15-20*
scène VI	*p. 100, l. 21*

Épisode III *(p. 100, l. 22 - p. 103., l. 5) :* Représention graphique

scène I	*p. 100, l. 22 - p. 101, l. 6*
scène II	*p. 101, l. 7-12*
scène III	*p. 101, l. 13-16*
scène IV	*p. 101, l. 17- p. 102, 4*
scène V	*p. 102, l. 5-11*
scène VI	*p. 102, l. 12*
scène VII	*p. 102, l. 13-14*
scène VIII	*p. 102, l. 15 - p. 103, l. 1*
scène IX	*p. 103, l. 2-5*

Épisode IV *(p. 103, l. 6-23) :* Fonction strictement croissante

scène I	*p. 103, l. 6-9*
scène II	*p. 103, l. 10-11*
scène III	*p. 103, l. 12-23*

Épisode V *(p. 103, l. 24 - p. 104, l. 3) :* Remarque sur la définition

Épisode VI *(p. 104, l. 4 - p. 105, 1. 9) :* Comment désigner une fonction

scène I	*p. 104, l. 4-11*
scène II	*p. 104, l. 12 - p. 105, l. 9*

Épisode VII *(p. 105, l. 10 - p. 107, l. 24) :* Exemple de fonction affine

scène I	*p. 105, l. 10-12*
scène II	*p. 105, l. 13-18*
scène III	*p. 105, l. 19-20*
scène IV	*p. 105, l. 21-24*
scène V	*p. 105, l. 25 - p. 106, l. 3*
scène VI	*p. 106, l. 4-9*
scène VII	*p. 106, l. 10-11*
scène VIII	*p. 106, l. 12-16*
scène IX	*p. 106, l. 17 - p. 107, l. 1*
scène X	*p. 107, l. 2-8*
scène XI	*p. 107, l. 9-16*
scène XII	*p. 107, l. 17-22*
scène XIII	*p. 107, l. 23-24*

C. GRILLE DE RECUEIL DE DONNÉES

IDENTIFICATION DE LA SÉANCE : _

I. Le tableau de l'enseignant. (analyse par séance)

A ◆ quantité inscrite par séance (mesurée en nombre de tableaux)

1 ☐ *$0 \leq$ nombre ≤ 1*
2 ☐ *$1 <$ nombre ≤ 2*
3 ☐ *$2 <$ nombre ≤ 3*
4 ☐ *$3 <$ nombre ≤ 4*

B ◆ où commence-t-il à écrire ?

1 ☐ *en haut à gauche*
2 ☐ *en haut au centre*
3 ☐ *en haut d'une autre colonne*
4 ☐ *ailleurs*

C ◆ organisation générale du tableau

1 ☐ *« brouillon »*
2 ☐ *en colonnes linéaires*
3 ☐ *en colonnes fonctionelles*

D ◆ rythme d'effaçage.

1 ☐ *pour faire de la place*
2 ☐ *à la fin de chaque épisode*

E ◆ mode d'effaçage

1 ☐ *complet*
2 ☐ *partiel « brouillon »*
3 ☐ *partiel organisé avec recopiage éventuel de parties selectionnées*

IDENTIFICATION DE L'ÉPISODE : _

IDENTIFICATION DE LA SCÈNE : _

II. Le contenu du tableau.

A ◆En regard du savoir à enseigner **(analyse par épisode)**

1 ☐ *complet*
2 ☐ *partiel*

B ◆Fonction de ce qui est écrit ou montré **(analyse par scène)**

1 ☐ *étiqueter*
2 ☐ *organiser*
3 ☐ *soutenir la mémoire de travail de la classe*

4 ☐ *informer ou rappeler une connaissance ou un résultat*
5 ☐ *proposer un travail, une question ou un résultat*
6 ☐ *illustrer*
7 ☐ *simplifier*
8 ☐ *indiquer une méthode, un conseil ou une mise en garde*

III. L'apparence du tableau :
ce qu'un élève y voit, ce que le professeur y montre. (analyse par scène)

A ◆ autonomie de ce qui est écrit (montré)
1 ☐ *autonome*
2 ☐ *incomplet mais la partie présente a une entité autonome*
3 ☐ *aucune partie autonome*

B ◆ choix de ce qui est montré
1 ☐ *une globalité*
2 ☐ *une partie d'une globalité*
3 ☐ *un élément d'une globalité*

C ◆ langage de ce qui est écrit (montré)
1 ☐ *français courant*
2 ☐ *mathématique*
3 ☐ *graphique*
4 ☐ *schéma*
5 ☐ *icône*
6 ☐ *autre*

D ◆ présentation de ce qui est écrit (montré)
1 ☐ *soulignement*
2 ☐ *encadrement*
3 ☐ *couleur*
4 ☐ *icônes*

IV La gestion du tableau et celle de la classe. (analyse par scène)

A ◆ type d'écriture
1 ☐ *linéaire (écrit dans le sens de la lecture orale linéaire)*
2 ☐ *dynamique (écrit selon un ordre différent de celui de la lecture orale linéaire)*

B ◆ ce qui est écrit (montré) et ce qui est (a été ou sera) dit
1 ☐ *non dit*
2 ☐ *dit avant seulement*
3 ☐ *dit durant seulement*
4 ☐ *dit après seulement*
5 ☐ *dit avant et durant pas après*
6 ☐ *dit avant, durant et après*
7 ☐ *dit durant et après pas avant*
8 ☐ *dit avant et après pas pendant*

C ◆ transformation dit - écrit (montré)

1 ☐ *ce qui est dit est identique à ce qui est écrit (montré)*

2 ☐ *ce qui est dit est analogue (même sens et fonction) à ce qui est écrit (montré)*

3 ☐ *ce qui est dit est différent de ce qui est écrit (montré)*

D ◆ quelle est la consigne explicite par rapport à ce qui est écrit ?

1 ☐ *aucune*

2 ☐ *lire et comprendre*

3 ☐ *critiquer*

4 ☐ *recopier*

E ◆ organisation de la classe par rapport à l'acte d'écrire ou de montrer au tableau

– qui propose ?

1 ☐ *le professeur*

2 ☐ *un ou des élèves*

– qui décide ?

3 ☐ *le professeur*

4 ☐ *un ou des élèves*

– qui exécute ?

5 ☐ *le professeur*

6 ☐ *un ou des élèves*

F ◆ organistion de la classe par rapport à ce qui doit être écrit ou montré

– qui propose ?

1 ☐ *le professeur*

2 ☐ *un ou des élèves*

– qui décide ?

3 ☐ *le professeur*

4 ☐ *un ou des élèves*

G ◆ rôle de chacun quand un élève est au tableau

– du professeur

– de l'élève au tableau

– des autres élèves

D. TABLEAU DES RÉSULTATS BRUTS (PREMIÈRE SÉANCE)

résultats obtenus par la grille d'observation du tableau

II B	1																																												0
	2									1	1															1																			6,97
	3						1																																						2,32
	4	1	1			1			1			1	1			1	1	1	1		1				1				1			1		1	1	1	1	1	1			1	1	1	53,4
	5			1	1									1	1									1			1	1			1		1		1										23,2
	6																																												0
	7																																												0
	8							1												1		1	1							1											1				13,9
III A	1					1	1	1				1			1									1	1	1						1	1	1	1				1	1	1	1	1	1	41,8
	2	1		1	1				1	1	1		1			1		1	1	1	1	1	1					1	1	1	1					1	1	1							48,8
	3													1			1										1																		6,97
III B	1		1					1		1	1		1												1								1												16,2
	2																					1	1							1				1										1	11,6
	3						1					1				1				1		1								1											1				16,2
III C	1						1																															1							4,65
	2	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1		1	1	93
	3																																												0
	4																																									1			2,32
	5																																												0
	6																																												0
III D	1																																												0
	2																																1												2,32
	3															1	1	1	1	1	1	1	1																						18,6
	4																																												0
IV A	1	1		1		1			1				1	1	1	1	1		1	1				1					1		1	1			1	1			1	1					44,1
	2				1							1						1			1					1		1									1	1				1			20,9
IV B	1											1				1																				1	1		1		1				13,9
	2				1	1			1																						1									1					11,6
	3	1	1	1						1	1						1	1	1	1	1		1		1	1		1	1	1		1	1	1				1					1		48,8
	4																																												0
	5												1	1	1								1				1																		11,6
	6						1	1																																		1		1	9,3
	7																							1																					2,32
	8																																		1										2,32
IV C	1	1													1		1															1						1	1						13,9
	2		1							1			1					1	1										1					1	1					1		1	1	1	27,9
	3			1	1	1	1	1	1		1			1						1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1		1												46,5
IV D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	100
	2																																												0
	3																																												0
	4																																												0
IV E	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	100
	2																																												0
	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	100
	4																																												0
	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	100
	6																																												0
IV F	1	1	1	1	1		1	1		1	1		1	1	1					1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1				74,4
	2					1			1			1				1	1	1	1															1								1	1	1	25,5
	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	100
	4																																												0

TABLEAU DES RÉSULTATS BRUTS (DEUXIÈME SÉANCE)

résultats obtenus par la grille d'observation du tableau

II B 1				1																1															6,25	
2																																			0	
3																																			0	
4	1	1	1		1	1						1	1	1		1	1	1			1	1		1	1	1	1		1	1	1	1	1		66,6	
5							1												1				1					1							12,1	
6								1	1	1	1				1																				15,1	
7																																			0	
8																																			0	
III A 1			1	1	1	1	1			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1	1	1	1		1	1					1		66,6	
2	1	1						1	1											1	1					1			1	1	1	1			33,3	
3																																			0	
III B 1																							1												3,03	
2		1									1	1			1									1	1			1	1						24,2	
3			1	1	1	1	1									1	1	1	1													1	1		33,3	
III C 1					1																					1									6,06	
2	1	1	1	1			1									1			1		1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1		57,5	
3								1	1	1	1	1	1	1	1																				24,2	
4																																			0	
5					1	1												1																	9,09	
6																	1			1							1								9,09	
III D 1													1							1															6,06	
2				1			1																												6,06	
3										i							1																		6,06	
4						1												1																	6,06	
IV A 1	1		1		1															1	1	1		1		1	1		1	1	1				36,3	
2		1		1				1	1	1	1		1	1			1																		27,2	
IV B 1							1													1			1												9,09	
2																														1	1				6,06	
3	1	1	1			1		1	1	1		1	1	1	1	1	1	1			1	1		1		1		1				1	1		63,6	
4																									1										3,03	
5											1								1								1								9,09	
6				1																															3,03	
7					1																														3,03	
8																																			0	
IV C 1	1		1		1																			1	1		1								18,1	
2						1		1		1		1	1				1				1											1			24,2	
3		1		1					1		1			1	1	1		1	1			1				1		1	1	1	1		1		48,4	
IV D 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		100	
2																																			0	
3																																			0	
4																																			0	
IV E 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		100	
2																																			0	
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		100	
4																																			0	
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		100	
6																																			0	
IV F 1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		93,9	
2								1														1							1	1	1	1			18,1	
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		100	
4																																			0	

E. RÉSULTATS DES COMPARAISONS EFFECTUÉES

Comparaison des deux séances

Pour l'analyse scène par scène, l'étude porte sur le premier quart d'heure

	A % abs	B % abs	A % rel	B % rel
Le tableau de l'enseignant				
A. Quantité inscrite par séance (mesurée en nombre de tableaux)				
1 *0 ≤ nombre ≤ 1*				
2 *1 < nombre ≤ 2*	×	×		
3 *2 < nombre ≤ 3*				
4 *3 < nombre ≤ 4*				
B. Où commence-t-il à écrire ?				
1 *en haut à gauche*				
2 *en haut au centre*	×	×		
3 *en haut d'une autre colonne*				
4 *ailleurs*				
C. Organisation générale du tableau				
1 *« brouillon »*				
2 *en colonnes linéaires*	×	×		
3 *en colonnes fonctionnelles*				
D. Rythme d'effaçage				
1 *pour faire de la place*	×	×		
2 *à la fin de chaque épisode*				
E. Mode d'effaçage				
1 *complet*				
2 *partiel « brouillon »*	×	×		
3 *partiel organisé*				
Le contenu du tableau				
A. En regard du savoir à enseigner	**100**	**100**	**100**	**100**
1 complet	50	100	50	100
2 partiel	50	0	50	0
B. Fonction de ce qui est écrit ou montré	**100**	**100**	**100**	**100**
1 étiqueter	0	6,2	0	6,2
2 organiser	7	0	7	0
3 soutenir la mémoire de travail de la classe	2,3	0	2,3	0
4 informer ou rappeler une connaissance ou un résultat	53,4	66,6	53,4	66,6
5 proposer un travail, une question ou un résultat	23,4	12,1	23,4	12,1
6 illustrer	0	15,1	0	15,1
7 simplifier	0	0	0	0
8 indiquer une méthode, un conseil ou une mise en garde	13,9	0	13,9	0
L'apparence du tableau				
A. Autonomie de ce qui est écrit (montré)	**97,6**	**100**	**100**	**100**
1 autonome	41,8	66,7	42,8	66,7
2 incomplet mais la partie présente a une entité autonome	48,8	33,3	50	33,3
3 aucune partie autonome	7	0	7,2	0
B. Choix de ce qui est montré	**44**	**60,5**	**100**	**100**
1 une globalité	16,2	3	36,8	5
2 une partie d'une globalité	11,6	24,2	26,4	40
3 un élément d'une globalité	16,2	33,3	36,8	55

C. Langage de ce qui est écrit	**100**	**106**	**100**	**100**
1 français courant	4,7	6,1	4,7	5,8
2 mathématique	93	57,5	93	54,2
3 graphique	0	24,2	0	22,8
4 schéma	2,3	0	2,3	0
5 icône	0	9,1	0	8,6
6 autre	0	9,1	0	8,6

D. Présentation de ce qui est écrit	**20,9**	**24,4**	**100**	**100**
1 soulignement	0	6,1	0	25
2 encadrement	2,3	6,1	11	25
3 couleur	18,6	6,1	89	25
4 icônes	0	6,1	0	25
La gestion du tableau et celle de la classe.				
A. Type d'écriture	**65**	**63,5**	**100**	**100**
1 linéaire	44,1	36,3	67,8	57,2
2 dynamique	20,9	27,2	32,2	42,8
B. Ce qui est écrit (montré) et ce qui est (a été ou sera) dit	**100**	**96,9**	**100**	**100**
1 non dit	13,9	9,1	13,9	9,4
2 dit avant seulement	11,6	6,1	11,6	6,3
3 dit durant seulement	48,8	63,6	48,8	65,6
4 dit après seulement	0	3	0	3,1
5 dit avant et durant pas après	11,6	9,1	11,6	9,4
6 dit avant, durant et après	9,3	3	9,3	3,1
7 dit durant et après mais pas avant	2,4	3	2,4	3,1
8 dit avant et après mais pas pendant	2,4	0	2,4	0
C. Transformation dit - écrit (montré)	**88,3**	**90,7**	**100**	**100**
1 ce qui est dit est identique à ce qui est écrit (montré)	13,9	18,1	15,7	20
2 ce qui est dit est analogue à ce qui est écrit (montré)	27,9	24,2	31,6	26,7
3 ce qui est dit est différent de ce qui est écrit (montré)	46,5	48,4	52,7	53,3
D. Quelle consigne par rapport à ce qui est écrit				
1 aucune	100	100	100	100
E. Organisation de la classe par rapport à l'acte d'écrire				
– qui propose ? 1 le professeur	100	100	100	100
2 un ou des élèves	0	0	0	0
– qui décide ? 3 le professeur	100	100	100	100
4 un ou des élèves	0	0	0	0
– qui exécute ? 5 le professeur	100	100	100	100
6 un ou des élèves	0	0	0	0
F. Organisation de la classe par rapport à ce qui doit être écrit				
– qui propose ? 1 le professeur	74,5	93,9	74,5	83,8
2 un ou des élèves	25,5	18,1	25,5	16,2
– qui décide ? 3 le professeur	100	100	100	100
4 un ou des élèves	0	0	0	0

Comparaison de deux épisodes

Classe A Épisode I : Définition d'un intervalle symétrique
Classe B Épisode II : Définition d'une fonction croissante

	A	B
Le contenu du tableau		
Fonction de ce qui est écrit ou montré		
1 étiqueter	0	16
4 informer ou rappeler une connaissance ou un résultat	100	84
L'apparence du tableau		
A. autonomie de ce qui est écrit (montré)		
1 autonome	0	67
2 incomplet mais la partie présente a une entité autonome	100	33
B. choix de ce qui est montré	**0**	**83**
2 une partie d'une globalité	0	20
3 un élément d'une globalité	0	80
La gestion du tableau et celle de la classe.		
A. type d'écriture		
1 linéaire	100	60
2 dynamique	0	40
B. ce qui est écrit (montré) et ce qui est (a été ou sera) dit		
3 dit durant seulement	100	68
6 dit avant, durant et après	0	16
7 dit durant et après mais pas avant	0	16
C. transformation dit - écrit (montré)		
1 ce qui est dit est identique à ce qui est écrit (montré)	100	50
2 ce qui est dit est analogue à ce qui est écrit (montré)	0	17
3 ce qui est dit est différent de ce qui est écrit (montré)	0	33
F. organisation de la classe : qui propose ?		
1 le professeur seul	100	100

Comparaison de deux épisodes

Classe A Épisode III : Exemple d'intervalle symétrique : $[-3 ; 3]$
Classe B Épisode VII : Exemple d'application croissante ($x \mapsto 4x+7$)

	A	B
Le contenu du tableau		
Fonction de ce qui est écrit ou montré		
2 organiser	20	0
3 soutenir la mémoire de travail de la classe	10	0
4 informer ou rappeler une connaissance ou un résultat	40	85
5 proposer un travail, une question ou un résultat	20	15
8 indiquer une méthode, un conseil ou une mise en garde	10	0
L'apparence du tableau		
A. autonomie de ce qui est écrit (montré)		
1 autonome	70	54
2 incomplet mais la partie présente a une entité autonome	30	56
B. choix de ce qui est montré	60	54
1 une globalité	67	14
2 une partie d'une globalité	0	57
3 un élément d'une globalité	33	29
La gestion du tableau et celle de la classe.		
A. type d'écriture		
1 linéaire	67	100
2 dynamique	33	0
B. ce qui est écrit (montré) et ce qui est (a été ou sera) dit		
1 non dit	10	8
2 dit avant seulement	30	17
3 dit durant seulement	30	58
4 dit après seulement	0	8
5 dit avant et durant pas après	10	8
6 dit avant, durant et après	20	0
C. transformation dit - écrit (montré)		
1 ce qui est dit est identique à ce qui est écrit (montré)	0	25
2 ce qui est dit est analogue à ce qui est écrit (montré)	20	17
3 ce qui est dit est différent de ce qui est écrit (montré)	80	58
F. organisation de la classe : qui propose ?		
1 le professeur	70	70
2 un ou des élèves	30	30

Comparaison des scènes suivant la fonction de ce qui est écrit au tableau

Utilisation du tableau pour des apports mathématique (Math): pour informer ou proposer
Utilisation du tableau pour des apports métémathématiques (Méta) : pour organiser, illustrer, simplifier…

	classe A		classe B	
	Méta	Math	Méta	Math
	14	**86**	**21**	**79**
L'apparence du tableau				
A. autonomie de ce qui est écrit (montré)				
1 autonome	50	42	57	69
2 incomplet mais la partie présente a une entité autonome	50	50	43	31
3 aucune partie autonome	0	8	0	0
B. choix de ce qui est montré	**83**	**32**	**43**	**65**
1 une globalité	33	38	0	6
2 une partie d'une globalité	17	31	67	35
3 un élément d'une globalité	50	31	33	59
La gestion du tableau et celle de la classe.				
A. type d'écriture	**17**	**76**	**86**	**58**
1 linéaire	100	70	14	73
2 dynamique	0	30	86	26
B. ce qui est écrit (montré) et ce qui est (a été ou sera) dit				
1 non dit	17	14	14	8
2 dit avant seulement	0	14	0	8
3 dit durant seulement	66	46	44	68
4 dit après seulement	0	0	0	4
5 dit avant et durant pas après	0	14	14	8
6 dit avant, durant et après	17	8	14	0
7 dit durant et après mais pas avant	0	2	14	4
8 dit avant et après mais pas pendant	0	2	0	0
C. transformation dit - écrit (montré)				
1 ce qui est dit est identique à ce qui est écrit (montré)	0	18	0	25
2 ce qui est dit est analogue à ce qui est écrit (montré)	20	33	33	25
3 ce qui est dit est différent de ce qui est écrit (montré)	80	49	67	50
F. organisation de la classe : qui propose ?				
1 le professeur	100	70	86	96
2 un ou des élèves	0	30	14	19

Comparaison des scènes où un élève est à l'origine de ce qui est écrit ou montré

Ces scènes représentent 25% des scènes de la séance avec la classe de seconde A et 18% des scènes de la séance avec la classe de seconde B.

	A	B
Le contenu du tableau		
Fonction de ce qui est écrit ou montré		
4 informer ou rappeler une connaissance ou un résultat	100	83
6 illustrer	0	17
L'apparence du tableau		
A. autonomie de ce qui est écrit (montré)		
1 autonome	56	17
2 incomplet mais la partie présente a une entité autonome	36	83
3 aucune partie autonome	18	0
B. choix de ce qui est montré	**36**	**33**
1 une globalité	0	0
2 une partie d'une globalité	50	50
3 un élément d'une globalité	50	50
La gestion du tableau et celle de la classe.		
A. type d'écriture		
1 linéaire	63	80
2 dynamique	37	20
B. ce qui est écrit (montré) et ce qui est (a été ou sera) dit		
1 non dit	18	0
2 dit avant seulement	18	40
3 dit durant seulement	44	60
6 dit avant, durant et après	18	0
C. transformation dit - écrit (montré)		
1 ce qui est dit est identique à ce qui est écrit (montré)	11	0
2 ce qui est dit est analogue à ce qui est écrit (montré)	67	33
3 ce qui est dit est différent de ce qui est écrit (montré)	22	67
F. organisation de la classe : qui propose ?		
1 le professeur	0	67
2 un ou des élèves	100	100