UN TABLEUR - GRAPHEUR
POUR ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES
EXEMPLE EN CLASSE DE 3^e

Bulletin de l'APMEP n°423 Septembre - Octobre 1999 (pp. 437-445), APMEP : Paris.

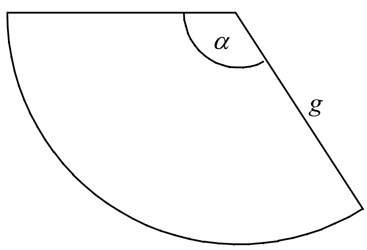
Les nouveaux programmes du Collège des classes de 4^e et de 3^e ainsi que les ambitions annoncées par le ministère pour le futur Lycée insistent sur la nécessité de formation des élèves à l'utilisation des nouveaux outils d'écriture, de calcul et de dessin : traitement de textes, tableur-grapheur, calculateur formel et logiciel de dessin géométrique.

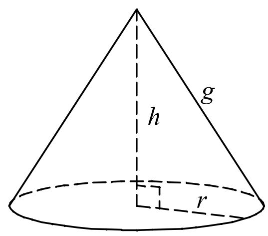
Nous décrivons, dans cet article, une séquence pédagogique où les apports d'un tableur-grapheur nous semblent avoir permis un travail et un apprentissage mathématique. Elle a été réalisée en deux séances d'une heure dans l'une de nos classes, une troisième « standard » d'un collège intégré à un Réseau d'Education Prioritaire. La présentation de la première heure sera brève et nous détaillerons la deuxième. L'objectif annoncé aux élèves était de répondre à un problème d'optimisation posé par la fabrication d'un cône de révolution. L'outil algébrique n'étant pas suffisant, les élèves ont dû recourir à un graphique pour tenter de résoudre ce problème.

L'objectif pédagogique était multiple : réinvestir les connaissances acquises sur le cône de révolution, monter l'utilisation qu'on peut faire d'un graphique pour résoudre un problème, faire douter les élèves de la « confiance » qu'on peut accorder à un graphique pour justifier le besoin d'une étude théorique[1], étude qui sera menée au Lycée. C'est à ce niveau que l'utilisation d'un tableur-grapheur s'est avérée efficace.

Précisons dès à présent que, à défaut d'équipement suffisant, ce sont seulement les résultats obtenus grâce à un tableur-grapheur qui ont été utilisés dans la séquence, ils ont été montrés aux élèves par rétroprojection de transparents où figuraient des copies d'écrans.

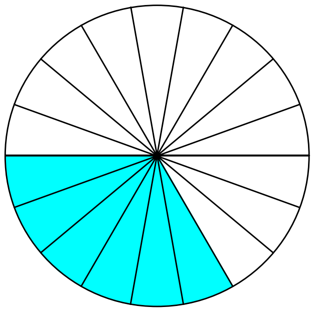
Première séance





L'étude du cône de révolution a mis en évidence les trois variables suivantes : le rayon r de la base, la hauteur h du cône et la longueur g de la génératrice. La première heure de la séquence a porté sur la fabrication de la surface latérale d'un cône de révolution. Elle a introduit une nouvelle variable : l'angle α du secteur de disque dont le rayon est la génératrice du cône. Les élèves savaient déjà que r, h et g sont reliés par la propriété de Pythagore ($g^2=r^2+h^2$) et que le volume V du cône s'écrit $V = \frac{1}{3} Bh = \frac{\pi}{3} r^2 h$ où B désigne l'aire de la base du cône.

[1] En géométrie, la question de la « confiance » qu'on peut accorder à une figure est souvent d'actualité. Cette question soulève une réflexion mathématique à deux niveaux : en introduction des outils nouveaux et en application de ces nouveaux outils pour répondre aux questions qu'ils permettent de traiter.



Après une étude de la surface latérale du cône (tout point du cercle de base est à la même distance g du sommet du cône), nous avons proposé aux élèves deux disques sur une feuille de papier blanc où figuraient 18 rayons formant un angle de 20°. Chaque élève a découpé et conservé deux secteurs identiques de disque, par exemple le secteur non-grisé de la figure. Avec le premier il a fabriqué la surface latérale d'un cône. Le second restant à l'état de patron a servi à des manipulations montrant que la longueur ℓ de l'arc du secteur est égale au périmètre de la base du cône : $\ell=2\pi r$.

Les rayons du disque ont permis de faciliter la mise en évidence de la proportionnalité entre l'angle α du secteur et la longueur ℓ de l'arc. Les différents cônes réalisés par les élèves avaient en commun que l'angle du secteur circulaire était un multiple de 20° ce qui a induit la relation de proportionnalité. Les égalités $\frac{\alpha}{360} = \frac{\ell}{2\pi g}$ et, avec $\ell = 2\pi r$, $\frac{\alpha}{360} = \frac{r}{g}$ ont été établies.

Au cours de cette construction, les élèves ont travaillé avec des valeurs de α différentes. Malgré la valeur constante de la génératrice, la variation de l'angle α entraîne une variation de la hauteur, du rayon de la base et donc du volume. La précision de l'analyse a progressé. Plus la valeur de α est petite, plus le rayon r est petit et plus la hauteur h est grande. Quand α croît de 0 à 360 degrés, r croît de 0 à g et h décroît de g à 0.

Un problème d'optimisation s'est posé. Le volume du cône, lui aussi, varie avec α. Mais pour quelle valeur de l'angle α ce volume est-il maximum ? Nous ramassons les cônes, ce problème sera étudié plus tard.

Deuxième séance

Analyse heuristique du problème

Les cônes sont ressortis, rassemblés et exposés. Les volumes sont comparés. Nous aurions pu apporter du sucre en poudre mais nous nous sommes contenté d'une comparaison visuelle... Le fait qu'on ne puisse rien prouver par l'expérience a eu quelques avantages, les élèves ont beaucoup discuté pour établir des lois de variations conjointes de l'angle α et du volume V.

Finalement, les élèves sont arrivés à : si α grandit en « partant » de plus que zéro alors pendant un moment, V grandit avec lui ; quand l'angle α « arrive » à zéro, le volume V du cône arrive aussi de zéro ; quand α « arrive » à 360°, le volume V retourne à la valeur zéro.

Pour quelle valeur de l'angle α ce volume est-il maximum ? Première conjecture : c'est sans doute pour $\alpha = 180°$; on regarde les cônes, on n'est sûr de rien, il faut en savoir plus.

Modélisation de la situation : passage à l'algèbre

Calcul du volume à partir de la valeur de l'angle α. Les élèves ne connaissent pas la valeur de g qui a été fournie pour construire les cônes. En fait, ce n'est pas grave, l'étude des agrandissements et réductions montre que la valeur de l'angle indique la « forme » du cône donc la valeur pour laquelle le volume est maximal ne dépend pas de la génératrice. Nous proposons alors à la classe de se fixer une valeur pour g, nous choisirons $g = 360$ mm qui nous facilitera les calculs. Avec $g = 360$ mm, on obtient $r = \alpha$. Exemple : si $\alpha = 120°$, alors $r = 120$ mm.

- On calcule h : $g^2 = r^2+h^2$ devient $h = \sqrt{360^2\text{-}\alpha^2}$.
- On calcule V : $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$ devient $V = \frac{\pi}{3} \alpha^2 \sqrt{360^2\text{-}\alpha^2}$.

Nous proposons de vérifier, par le calcul, les affirmations précédentes : si $\alpha = 0$ et si $\alpha = 360$ on retrouve bien $V = 0$.

Comment savoir pour quelle valeur de α on obtiendra le volume maximum ? La récente interprétation graphique des systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues a sans doute influencé les élèves : ils proposent de dresser un tableau de valeurs et de dessiner un graphique. Et $\frac{\pi}{3}$? On peut s'en passer : $\frac{\pi}{3} < 1$ et, de toute façon, ce qui varie dans V n'est pas $\frac{\pi}{3}$ mais seulement $\alpha^2 \sqrt{360^2\text{-}\alpha^2}$.

On note $v(\alpha)=\alpha^2 \sqrt{360^2\text{-}\alpha^2}$ et on dresse le tableau !

Elaboration d'un tableau de valeurs : de l'algèbre à la fonction

Ecriture de la ligne de frappe. Nos élèves sont certainement les derniers à ne pas profiter dès le collège de calculatrices qui respectent la syntaxe algébrique. Pour un angle de 120°, il faut taper :

120	x^2	×	(	360	x^2	-	120	x^2	)	$\sqrt{\ }$	=	⟶ 4 887 552.072

Abrégeons ici une étape « douloureuse » : que représentent ces 4,9 millions ? 4,9 millions de mm^3 c'est 4,9 dm^3 ou encore 4,9 ℓ.

On part de zéro et on dresse un tableau de valeurs. Non, c'est trop lourd ! Après trois ou quatre valeurs calculées, nous limitons cette étape répétitive et nous donnons aux élèves le tableau qu'ils obtiendraient.

α en °	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360
v en ℓ	0	0,1	0,6	1,3	2,2	3,5	4,9	6,5	8,3	10,1	12,0	13,8	15,5	16,8	17,7	17,9	16,9	13,7	0

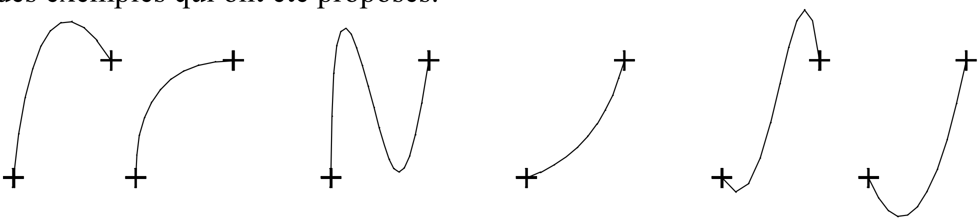
Nous regrettons presque, à cette étape, de ne pouvoir inscrire une troisième ligne avec la forme du cône qui varie en fonction de α... Les élèves mobilisent un mode de pensée fonctionnel : α et v ne sont plus les écritures littérales avec lesquelles ils calculaient précédemment, ces écritures sont des variables, v dépend de α, la valeur de v varie quand celle de α varie et la loi qui les relient n'est plus une formule, c'est un procédé (laborieux) pour déterminer la valeur de v à partir de celle de α.

« Mais c'était faux d'affirmer que 180° donnerait le plus grand volume ! » Nous confirmons avec bienveillance : comme il est faux d'affirmer qu'un point d'un segment est son milieu sans complément d'enquête... Maintenant, graphique !

De la fonction au graphique, comment relier les points ?

Distribution d'une feuille de papier millimétré. Axe des abscisses : 1 cm représente 20°. Axe des ordonnées 1 cm représente 1ℓ. A vos crayons, marquez les points ! Question classique : Peut-on relier les points ? Réponse standard : il faut voir... Est-ce que cela a un sens ? Si cela a un sens, comment doit-on les relier ? La question avait déjà été posée à l'occasion de deux devoirs à la maison où des graphiques ont été tracés et lors de l'interprétation graphique des systèmes de deux équations à deux inconnues. Le théorème de Thalès avait permis de conclure pour les équations du type $ax+by = c$ avec $b \neq 0$ qui s'écrivent $y = mx+p$. Mais v ne s'obtient en ajoutant un nombre p au produit de l'angle α par un nombre m ! Retour au doute...

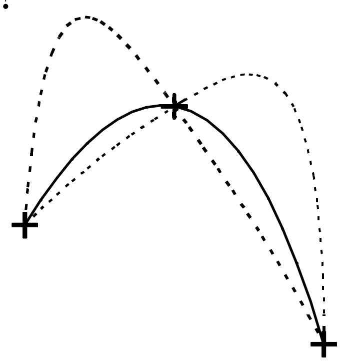
Notre proposition d'enseignant : prenons par exemple les points de coordonnées (120 ; 4,9) et (140 ; 6,5), nous reposons la question, cela a-t-il un sens de les relier et si oui comment ? En résumé des discussions et interventions nombreuses, il ressort la coexistence de deux conceptions qui s'opposent : « à toute valeur de α comprise entre 120 et 140 correspond une valeur de v donc si on avait pris plus de point on aurait une meilleure information » et « on ne peut pas savoir car les points n'ont pas de largeur donc même en en prenant plus, ils ne se toucheront jamais ». A ce niveau, nous constatons que beaucoup d'élèves ne doutent pas qu'il soit possible, sur cet exemple au moins, de relier les points. Nous n'avons pas jugé utile à ce niveau de renforcer le doute, nous nous sommes contenté de légitimer ce doute et nous avons choisi d'approfondir la réflexion sur la manière de relier les points. Admettons donc qu'on puisse relier les deux points, il y a différentes façons de le faire sans tracer de segment, voici des exemples qui ont été proposés.



Le point de vue des élèves : il faudrait quand même qu'on puisse savoir si quand on passe d'un point à l'autre en montant (idée du vecteur de la translation) on peut ou non relier les points par une courbe en montant ! Réponse du professeur de troisième : nous le verrons dans le détail quand la courbe est droite mais pour les « vraies » courbes, il faudra patienter jusqu'au Lycée. En attendant, on peut relier les points par des segments ou « arrondir les angles » si l'on préfère.

Le problème se pose à nous : il ne faudrait pas que les élèves se persuadent trop vite qu'on peut relier les points en se laissant guider par la variation apparente de la courbe, sinon le maximum sera obligatoirement atteint pour $\alpha = 300°$. Trop tard ! Pratiquement tous les élèves de la classe ont tracé un graphique où le point de coordonnées (300 ; 17,9) est le maximum, la conclusion s'impose d'elle même, la réponse à la question posée au début de l'heure est enfin trouvée.

L’apport du tableur-grapheur : vivement l’analyse !



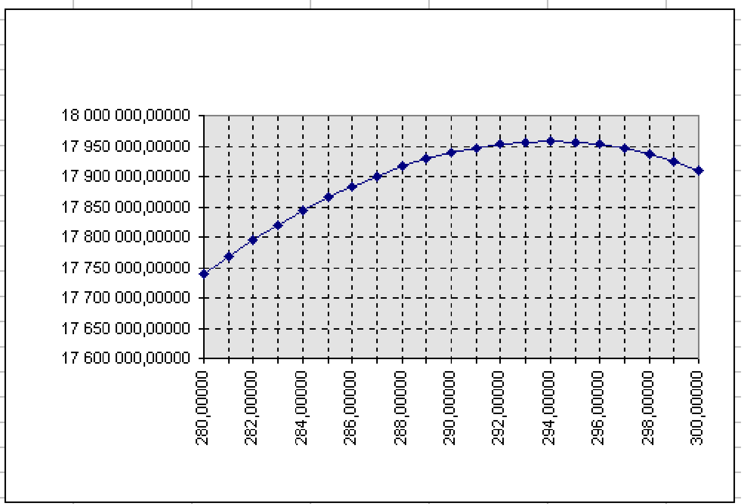
Retour au doute. Comment les points d’abscisses 280, 300 et 320 ont-ils été reliés ? Est-on sûr ou non que le maximum est 300 ? On pouvait relier les points de différentes façons. Aidé par quelques élèves, nous proposons trois façons différentes de relier ces trois points : ou le maximum est le point d’abscisse 300, ou c’est un point dont l’abscisse est comprise entre 280 et 300, ou encore c’est un point dont l’abscisse est comprise entre 300 et 320.

Pour répondre à la question, il faudrait calculer des valeurs intermédiaires. C’est ici que le tableur-grapheur est un outil intéressant. Compte tenu de l’importance du travail déjà fait, il était trop coûteux de demander aux élèves de recalculer des valeurs, de reconsidérer leur graphique. Avec le tableur-grapheur, on interroge la machine facilement, elle répond immédiatement. Elle calcule les valeurs, les dispose en tableau, marque les points et les relie... par des segments. On sait qu’elle triche, la réflexion mathématique est donc permise.

Que se passe-t-il entre 280 et 320 ? On gradue l’axe des abscisses avec une unité de 1°. Lumière ! Notre collège n’étant pas encore équipé de matériel informatique permettant un travail de type « tableau noir électronique », nous nous contentons de rétroprojection de transparents, on obtient :

a	v(a)
280,00000	17 739 894,92641
281,00000	17 768 681,39463
282,00000	17 795 616,25400
283,00000	17 820 657,36208
284,00000	17 843 761,50382
285,00000	17 864 884,34708
286,00000	17 883 980,39552
287,00000	17 901 002,93884
288,00000	17 915 904,00000
289,00000	17 928 634,27938
290,00000	17 939 143,09548
291,00000	17 947 378,32198
292,00000	17 953 286,32095
293,00000	17 956 811,87167
294,00000	17 957 898,09504
295,00000	17 956 486,37288
296,00000	17 952 516,26198
297,00000	17 945 925,40228
298,00000	17 936 649,41875
299,00000	17 924 621,81641
300,00000	17 909 773,86792

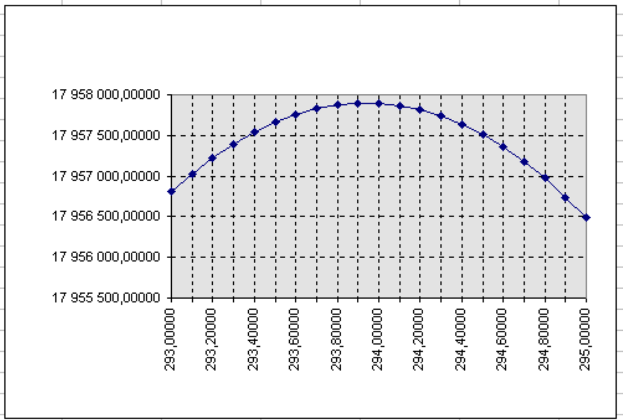
graduation : 1



Ainsi le volume maximum n’est pas atteint pour $\alpha=300°$, il le serait plutôt pour $\alpha=294°$ ou plus précisément pour une valeur de α comprise entre 293 et 295. Vous voulez zoomer la courbe sur cet intervalle ? Voici le résultat :

a	v(a)
293,00000	17 956 811,87167
293,10000	17 957 031,21703
293,20000	17 957 226,11274
293,30000	17 957 396,50081
293,40000	17 957 542,32306
293,50000	17 957 663,52117
293,60000	17 957 760,03661
293,70000	17 957 831,81068
293,80000	17 957 878,78451
293,90000	17 957 900,89904
294,00000	17 957 898,09504
294,10000	17 957 870,31309
294,20000	17 957 817,49359
294,30000	17 957 739,57675
294,40000	17 957 636,50262
294,50000	17 957 508,21103
294,60000	17 957 354,64165
294,70000	17 957 175,73395
294,80000	17 956 971,42722
294,90000	17 956 741,66056
295,00000	17 956 486,37288

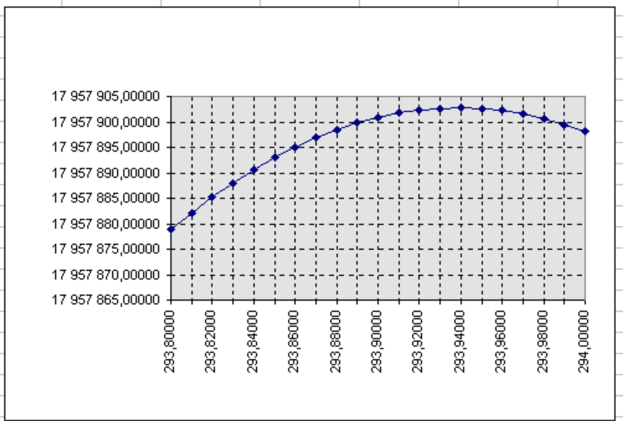
graduation : 0,1



Plus de précision ? A votre service, mais précisez l'intervalle sur lequel zoomer... La juxtaposition du tableau et du graphique permet le repérage sur les deux supports : entre 293,8 et 294. S'il vous plaît...

a	v(a)
293,80000	17 957 878,78451
293,81000	17 957 882,11560
293,82000	17 957 885,19805
293,83000	17 957 888,03178
293,84000	17 957 890,61675
293,85000	17 957 892,95288
293,86000	17 957 895,04013
293,87000	17 957 896,87843
293,88000	17 957 898,46772
293,89000	17 957 899,80794
293,90000	17 957 900,89904
293,91000	17 957 901,74095
293,92000	17 957 902,33362
293,93000	17 957 902,67698
293,94000	17 957 902,77098
293,95000	17 957 902,61556
293,96000	17 957 902,21066
293,97000	17 957 901,55622
293,98000	17 957 900,65217
293,99000	17 957 899,49846
294,00000	17 957 898,09504

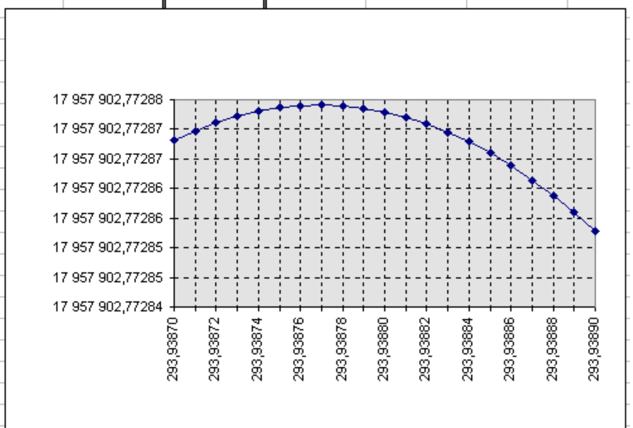
graduation : 0,01



Alors on pourra continuer comme cela jusqu'à quand ? Voyez...

a	v(a)
293,93870	17 957 902,77287
293,93871	17 957 902,77287
293,93872	17 957 902,77287
293,93873	17 957 902,77287
293,93874	17 957 902,77287
293,93875	17 957 902,77287
293,93876	17 957 902,77287
293,93877	17 957 902,77287
293,93878	17 957 902,77287
293,93879	17 957 902,77287
293,93880	17 957 902,77287
293,93881	17 957 902,77287
293,93882	17 957 902,77287
293,93883	17 957 902,77287
293,93884	17 957 902,77287
293,93885	17 957 902,77287
293,93886	17 957 902,77286
293,93887	17 957 902,77286
293,93888	17 957 902,77286
293,93889	17 957 902,77286
293,93890	17 957 902,77285

graduation : 0,00001



On a pu encadrer la valeur de α entre 293,9387 et 293,9389 mais on arrive aux limites de la machine : les valeurs affichées de $v(\alpha)$ sont égales pour des valeurs différentes de α. Le graphique laisse penser que le volume varie bien en atteignant un maximum pour une certaine valeur de l'angle α. Cette valeur a été encadrée avec de plus en plus de précision mais on arrive aux limites de la machine (en réalité c'est une option du logiciel mais qui bien sûr a ses limites), on n'obtiendra pas la valeur exacte...

Vivement l'analyse ! Il faut des outils pour déterminer les variations d'une fonction, et des outils pour localiser le maximum quand on a prouvé qu'il en existe un !

Conclusion

Cette activité, analogue aux problèmes bien connus d'optimisation de volume de boites, a eu pour origine, dans l'histoire de la classe, la manipulation du patron de la surface latérale d'un cône de révolution.

La représentation d'une fonction qui n'est pas affine est incontournable en classe de troisième : les élèves généralisent trop facilement la propriété de la représentation graphique des fonctions affines à toutes les fonctions... Choisir une fonction issue d'un problème nous semble indispensable pour que les élèves s'interrogent sur sa représentation graphique. Sans ce questionnement, les points de la courbe sont reliés sans aucune réflexion mathématique.

Mais trop de questionnement et d'incertitude décourage souvent nos élèves. Le tableur-grapheur a permis de soulager leur tâche : avec une machine, on peut envisager de faire beaucoup de calculs puisque c'est elle qui les fait... On peut tracer beaucoup de graphiques puisque c'est elle qui les trace...

En choisissant (c'est une option du logiciel) de faire relier les points par des segments et en l'explicitant en classe, on évite la confiance aveugle en la machine : à chaque étape, elle relie les points par des segments ; à chaque étape, elle se contredit en intercalant de nouveaux points non alignés. Le questionnement théorique reste entier mais, selon toute vraisemblance, on s'approche de plus en plus de la valeur cherchée.

Suffisamment près pour toute exploitation pratique : la précision obtenue est d'un cinquante-millième de degré. Jamais assez près pour répondre totalement à la question. Le travail effectué par les élèves durant cette activité leur a permis de passer d'un mode de pensé algébrique (transformation de formules, expression d'une variable en fonction d'une autre, calculs de valeurs) à un mode de pensée fonctionnel (recherche de propriétés de la fonction en questionnant sa représentation graphique : continuité, variation, extremum).

Nous pensons qu'une telle activité aide les élèves à préparer la transition de la troisième à la seconde : sans anticiper sur les programmes du Lycée, nous voulons introduire les préoccupations qui seront les leurs, c'est-à-dire leur poser les problèmes avant qu'on ne leur apporte les réponses.