INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

39
JANVIER 2002

CAHIER DE DIDIREM

LA MULTIPLICATION DES NOMBRES DÉCIMAUX

ENJEUX, TRANSPOSITIONS DIDACTIQUES ET CONTRAINTES D'ENSEIGNEMENT

Eric RODITI

DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

UNIVERSITE PARIS 7 - DENIS DIDEROT

TITRE :

La multiplication des nombres décimaux

Enjeux, transpositions didactiques et contraintes d'enseignement

AUTEUR :

RODITI Eric

RESUME :

La multiplication des nombres décimaux pose des problèmes d'enseignement à cause des erreurs persistantes des élèves tant pour le calcul du produit que pour la reconnaissance du modèle multiplicatif des situations. Cette notion est étudiée en évaluant les enjeux mathématiques de son enseignement, en analysant les transpositions didactiques qui sont proposées dans les publications et en déterminant des contraintes professionnelles dont les enseignants doivent tenir compte pour préparer leurs cours.

Le premier chapitre propose une mise au point sur la notion de nombre décimal en distinguant les représentations symboliques qui correspondent aux différentes fonctions des décimaux : représentation sous la forme d'un quotient, d'une somme ou d'un produit. La multiplication est étudiée en abordant les situations que cette opération modélise, ses propriétés, et les procédures de calcul du produit. Des analyses croisées permettent de rendre compte du potentiel didactique des différentes situations pour enseigner les propriétés de l'opération et pour élaborer des techniques opératoires.

Le deuxième chapitre présente une analyse des transpositions didactiques. Y sont étudiées les propositions d'enseignement de la multiplication des nombres décimaux qui figurent dans les programmes français actuels et passés, dans des manuels scolaires, dans des brochures à l'intention des professeurs, et dans des travaux de recherche en didactique des mathématiques. Cette analyse permet d'apprécier a priori les conséquences des choix d'enseignement en terme d'apprentissage des élèves.

Le troisième chapitre complète l'analyse précédente en croisant les résultats obtenus avec deux contraintes majeures qui influencent les choix des professeurs dans l'élaboration de leur projet d'enseignement : les indications des programmes en vigueur, et les connaissances réelles des élèves au moment où la notion est introduite. Les connaissances des élèves sont étudiées, par le biais des résultats à différentes évaluations. En ce qui concerne le programme, une approche de type écologique permet que la notion soit analysée de façon spécifique mais aussi quant à son intégration dans le programme de l'année scolaire.

MOTS CLES :

Décimaux, évaluation, multiplication, ordre de grandeur, situations multiplicatives, transposition didactique.

Editeur : IREM

Université PARIS 7-Denis Diderot

Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE

Case 7018 - 2 Place Jussieu

75251 PARIS Cedex 05

Dépôt légal : 2002

ISBN : 2-86612-220-8

LA MULTIPLICATION
DES NOMBRES DÉCIMAUX

Enjeux, transpositions didactiques et contraintes d'enseignement

Cahier de DIDIREM n°39, Université de Paris 7 – Denis Diderot, Janvier 2002

Éric RODITI

INTRODUCTION

Des questions de formateur sont à l'origine de ce cahier. Mieux comprendre l'enseignement d'une notion donnée pour répondre à des besoins que les professeurs expriment en formation initiale ou continue, et finalement contribuer à améliorer les apprentissages mathématiques des élèves, tels sont les objectifs poursuivis.

Nous nous intéressons ici à l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux en classe de sixième (conformément au programme du 22 novembre 1995) et nos questions portent à la fois sur les difficultés d'apprentissage que les élèves rencontrent, sur les problèmes que certaines d'entre elles causent aux professeurs, et sur les enseignements possibles de cette notion.

Les professeurs sont confrontés à des erreurs persistantes de leurs élèves

Des erreurs persistantes des élèves révèlent des difficultés d'apprentissage. Ces erreurs concernent, d'une part, la reconnaissance du modèle multiplicatif d'une situation dans laquelle les valeurs numériques ne sont pas entières, et d'autre part, la mise en œuvre de la technique opératoire. En outre, il subsiste des problèmes liés à la multiplication des entiers et à l'écriture des nombres décimaux.

Les professeurs s'interrogent sur les difficultés de leurs élèves. La technique opératoire, comparée à celle de la division, ne leur paraît pas difficile ; comme le modèle multiplicatif d'une situation est indépendant des valeurs numériques, le fait que les valeurs soient entières ou décimales ne leur semble pas modifier la difficulté de sa reconnaissance. Pourtant, la réaction de nombreux élèves montre le contraire, et les enseignants restent démunis devant ces difficultés.

Faire appel à la recherche en didactique pour étudier un enseignement

Dans la mesure où les analyses issues des seules connaissances mathématiques ne permettent pas d'expliquer les difficultés constatées ni *a fortiori* de les résoudre, il nous a semblé légitime d'utiliser les outils développés en didactique des mathématiques afin d'étudier les problèmes relatifs à l'enseignement et à l'apprentissage de la multiplication des nombres décimaux.

D'une manière classique en didactique, nous avons déterminé les contraintes et les possibles en tenant compte à la fois de considérations épistémologiques, des programmes et des acquis des élèves. Nous avons analysé les travaux issus de recherche en didactique des mathématiques [1], des brochures destinées aux professeurs mais aussi des manuels scolaires. L'enseignement de la multiplication des décimaux en classe de sixième repose sur deux notions étudiées antérieurement à l'école élémentaire, le nombre décimal et la multiplication.

Nous commençons donc par un bilan des travaux concernant ces notions et nous précisons les choix de l'institution scolaire par une lecture des programmes et de leur évolution. Nous étudions ensuite, en fonction des apprentissages potentiels des élèves, les diverses propositions d'enseignement de la multiplication des décimaux qui figurent dans les publications et que les professeurs pourraient utiliser pour préparer leurs cours. Nous proposons enfin de déterminer les projets possibles compte tenu des programmes et des connaissances des élèves quand ils entrent en sixième.

Des hypothèses théoriques ont guidé nos analyses

Nous supposons que l'apprentissage d'un élève dépend des situations qu'il étudie, en classe notamment, pour le contenu mathématique qu'elles comportent mais aussi pour l'organisation de la rencontre entre l'élève et le savoir.

Le contenu est abordé dans ce travail selon trois dimensions empruntées à la théorie des champs conceptuels [2] :

> ... un concept est un triplet de trois ensembles : C(s, I, S)
>
> s : l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence) ;
>
> I : l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié) ;
>
> S : l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant).
>
> (...) Le champ conceptuel des structures additives est à la fois l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs additions ou soustractions, et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations comme des tâches mathématiques.

Ainsi, chaque notion est analysée en considérant les problèmes qu'elle permet de résoudre (classés par catégorie, ils en constituent les situations de référence), ses propriétés dont certaines conduisent éventuellement à des méthodes de résolution des problèmes précédents dans un certain domaine de validité, ainsi que ses représentations symboliques et leur transformation.

Pour l'organisation de la rencontre entre l'élève et le savoir, conformément aux hypohèses généralement retenues en didactique des mathématiques, une

---

[1] Notamment deux ingénieries didactiques d'enseignement des nombres décimaux, celle de Nadine Brousseau & Guy Brousseau (1987) et celle de Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin (1986), des articles de Guy Brousseau (1998) sur les décimaux, des travaux de Gérard Vergnaud (1981 et 1983) sur la multiplication ainsi que la thèse de Janine Rogalski (1985) qui traite de la bidimensionnalité (de la multiplication).

[2] VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels, *in Recherches en didactique des mathématiques 10/2.3 (133-170),* Grenoble : La pensée sauvage.

attention particulière est portée à certaines caractéristiques de l'enseignement, tel qu'il est proposé dans les travaux étudiés. Il s'agit de la dynamique savoir ancien / savoir nouveau : comment l'enseignement prévu engage-t-il l'élève, avec ce qu'il sait déjà, à apprendre ce qu'il y a de nouveau ? Nous sommes également attentif aux dialectiques contextualisations / décontextualisation des savoirs : quelles sont les situations sur lesquelles reposent les problèmes auxquels les élèves sont confrontés pour « donner du sens » au savoir nouveau, et comment est aménagé le passage de connaissances issues du contexte de ces situations et de ces problèmes au savoir visé ? Dans l'étude des tâches proposées, nous repérons les dialectiques outil / objet des savoirs, ainsi que les différentes représentations symboliques mobilisées pour leur réalisation. Nous distinguons aussi les tâches qui ne demandent que des applications directes de techniques, de celles où l'élève doit, soit reconnaître une situation (de ce que Gérard Vergnaud appelle « la référence »), soit adapter des savoirs anciens.

Quelles questions sur la multiplication des décimaux ?

Le cadre général que nous venons de décrire sera utilisé pour étudier le cas précis de l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux. Nous cherchons à répondre à trois questions globales :

- quels sont les enjeux mathématiques d'enseignement de la multiplication des nombres décimaux ?
- quels sont *a priori* les enseignements possibles de la multiplication des nombres décimaux ?
- que deviennent ces possibles en considérant les prescriptions et les contraintes communes qui s'imposent aux professeurs ?

Les enjeux mathématiques de la multiplication des décimaux

Nous cherchons à mieux connaître les enjeux mathématiques dont la multiplication des décimaux est l'objet. Cette question nécessite une analyse du savoir (les nombres et l'opération) et des situations qui mettent en jeu ce savoir (les situations multiplicatives). A propos des nombres décimaux, nous nous demandons à la fois quelle est leur fonction, comment ils s'écrivent et dans quels problèmes ils interviennent. Concernant la multiplication, nous nous interrogeons sur les situations qui en constituent la référence (situations multiplicatives), sur les propriétés de l'opération et sur les méthodes de calcul d'un produit de deux décimaux. Le thème choisi est au carrefour de nombreux travaux de recherche en didactique des mathématiques. Nous les utilisons abondamment pour répondre à ces questions sur le savoir.

La multiplication des décimaux, les enseignements possibles

Alors que les nombres décimaux et que les situations multiplicatives ont été étudiées à l'école primaire, quels seraient les enseignements envisageables de la multiplication des nombres décimaux ? Pour répondre à cette question sans tenir compte des contraintes spécifiques à l'enseignement actuel dans une classe de sixième, nous allons chercher toute proposition permettant d'élaborer un projet d'enseignement dans diverses publications : manuels scolaires, brochures à l'intention des professeurs et recherches en didactique des mathématiques. Nous analysons alors ces projets en fonction de l'apprentissage [3] des élèves dont ils sont potentiellement vecteurs. La question de leur diversité sera examinée. Nous chercherons aussi à déterminer d'éventuelles zones d'ombre, c'est-à-dire des objets de savoirs liés à la multiplication des décimaux qui ne sont pas traités, ou qui le sont seulement très rarement. Ces zones d'ombre peuvent concerner des situations multiplicatives ou des propriétés de la multiplication. Le cas échéant nous tenterons d'en déterminer l'origine et les conséquences éventuelles sur l'apprentissage.

La transposition didactique à l'épreuve de l'exercice du métier

Si la transposition didactique désigne la nécessaire transformation d'un savoir mathématique pour qu'il puisse être enseigné, la question posée ici concerne l'influence des contraintes du métier sur cette transposition. Nous complétons donc l'analyse *a priori* de l'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième par une étude de deux facteurs qui influencent les choix des professeurs dans l'élaboration de leur projet d'enseignement : les élèves et le programme.

Les élèves sont ici étudiés, par le biais des résultats à différentes évaluations de compétences. Il s'agit de déterminer ce qu'ils savent déjà (sur les nombres décimaux et sur la multiplication d'un décimal par un entier) et quelles sont les difficultés d'apprentissage connues sur la multiplication de deux décimaux.

Le programme est analysé pour ce qui concerne spécifiquement la multiplication des décimaux mais aussi dans son ensemble parce que cette notion est réinvestie, cette même année de sixième, dans l'étude d'autres savoirs mathématiques. Les professeurs conçoivent un enseignement qui s'intègre dans le programme de l'année scolaire. Une analyse de type écologique [4] permettra une étude préalable de cette intégration.

Les publications étudiées pour répondre à ces questions

Nous allons présenter brièvement les publications que nous avons étudiées : nous commençons par les programmes, nous indiquons ensuite les différents ouvrages qui peuvent être consultés par un professeur et conduire à son projet d'enseignement, nous terminons par les évaluations de compétences des élèves.

Les programmes, les compléments et les instructions officielles

Nous avons utilisé les programmes actuels mais aussi les programmes antérieurs. Leur confrontation peut montrer une évolution de la position de l'institution scolaire mais aussi, elle permet de retracer l'histoire d'un enseignement. Nous avons consulté les programmes de l'enseignement primaire sur la multiplication et sur les décimaux avant et depuis 1995, et sur la

[3] Dans cette brochure, l'apprentissage des élèves doit s'entendre aussi bien comme le processus d'acquisition de savoirs nouveaux que comme l'acquisition elle-même.

[4] CHEVALLARD Y. (1994), Les processus de transposition didactique et leur théorisation, In Arsac et al. (Eds) *La transposition didactique à l'épreuve* (pp. 135 - 180), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

multiplication des nombres décimaux avant 1995. Nous avons également étudié l'ensemble du programme de 1995 pour la classe de sixième et particulièrement tout ce qui concerne la multiplication des décimaux.

Les manuels scolaires

Les manuels scolaires nous intéressent dans notre analyse des enseignements possibles. Toutes les équipes de rédaction comportent des professeurs aussi, malgré les contraintes des éditeurs qui pèsent sur les auteurs, les manuels traduisent les choix de la profession enseignante sur une notion. L'analyse de manuels actuels pour la dernière année d'école élémentaire donnera une image de l'enseignement que les élèves ont reçoivent avant d'entrer en classe de sixième. Enfin, la confrontation des manuels de primaire, antérieurs au changement de programme de 1995, et ceux de collège, édités depuis, permettra de montrer une continuité, ou une rupture, dans l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux.

Les publications à l'intention des professeurs

Les publications à l'intention des professeurs constituent une autre source pour accéder au débat éventuel qui anime la profession enseignante et une partie de la noosphère sur l'enseignement de la multiplication des décimaux. Ainsi, nous avons consulté des brochures pédagogiques et des articles, des publications pour la formation continue des professeurs ainsi que des publications pour la préparation du concours de recrutement des Professeurs d'Ecole.

Les publications de recherches en didactique des mathématiques

Les travaux de recherche en didactique des mathématiques sur les nombres décimaux et sur la multiplication sont nombreux. Nous proposons une synthèse des résultats concernant l'analyse épistémologique de la notion, les enjeux didactiques dont elle est l'objet, ainsi que des propositions d'enseignement.

Les évaluations des compétences des élèves

Nous terminons la présentation des sources documentaires utilisées dans ce travail par les publications des évaluations des compétences des élèves. Comment les professeurs tiennent-ils compte des acquis et des lacunes ? Cette question se pose nécessairement durant l'élaboration d'un projet d'enseignement. Nous avons consulté les résultats de différentes évaluations concernant les compétences inhérentes au savoir dont nous étudions l'enseignement. Ainsi avons-nous utilisé les résultats des évaluations incluses dans des recherches ou des articles à l'intention des professeurs, des évaluations menées par l'APMEP et, bien sûr, des évaluations ministérielles (DEP et DP&D [5]) à l'entrée en sixième.

[5] Ces évaluations nationales sont gérées par la direction chargée de l'évaluation au Ministère de l'Education nationale. Pour la période qui nous intéresse, cette direction a porté le nom de DEP (Direction de l'Evaluation et de la Prospective) puis de DP&D (Direction de la Programmation et du Développement). L'équipe chargée de l'élaboration des outils d'évaluation est composée d'un Inspecteur Général de l'Education nationale, d'Inspecteurs Pédagogiques Régionaux (c'est-à-dire de l'enseignement secondaire), d'un Inspecteur de l'Education nationale (c'est-à-dire de l'enseignement primaire), de Professeurs d'IUFM, de Collège et d'Ecole.

Organisation du cahier

1. Les nombres décimaux et la multiplication

Dans le premier chapitre de ce cahier, nous montrons le contenu mathématique que renferment les deux désignations « nombres décimaux » et « multiplication des nombres décimaux ». Autrement dit, nous proposons une mise au point sur les enjeux mathématiques de ces notions. Lesquels de ces contenus doivent - être enseignés ? appris ? et à quel niveau de la scolarité ? Nous ne répondons pas à ces questions mais nous donnons des indications sur les choix possibles à ce propos.

Afin d'organiser cette mise au point, nous avons choisi de traiter la notion de nombre décimal en distinguant leurs représentations symboliques qui correspondent chacune à différentes fonctions des décimaux : représentation sous la forme d'un quotient, d'une somme ou d'un produit. La multiplication sera traitée en abordant successivement les situations que cette opération modélise, ses propriétés, et les procédures de calcul du produit de deux décimaux.

2. La multiplication des décimaux en 6ème, quelle transposition didactique ?

C'est dans ce deuxième chapitre que nous montrons les choix effectués par différentes « institutions » à propos de l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux en primaire ou en sixième. Ces choix sont illustrés par des propositions plus ou moins détaillées suivant les institutions. Nous avons étudié les programmes français actuels et passés, des manuels, des brochures à l'intention des professeurs, des travaux de recherche en didactique des mathématiques.

Autant que possible, la présentation des propositions pour enseigner la multiplication des nombres décimaux est organisée en fonction des choix didactiques globaux, réalisés par les auteurs, pour enseigner cette notion. Ce chapitre permettra aux professeurs et aux formateurs d'apprécier *a priori* les conséquences de ces choix en terme d'apprentissage des élèves.

3. La transposition didactique à l'épreuve de l'exercice du métier

Nous savons que l'appréciation *a priori* des conséquences de tel ou tel choix didactique n'est pas suffisante pour un professeur ou pour un formateur, il faut encore croiser ces données avec les contraintes de l'exercice du métier : les indications des programmes en vigueur, les contraintes de temps qui ne sont pas des moindres, les connaissances réelles des élèves au moment où la notion nouvelle doit être présentée, et les contraintes liées à la gestion de la classe qui ne sont pas les mêmes suivant les tâches proposées aux élèves.

Dans le troisième chapitre du cahier, nous indiquons quelles sont les connaissances des élèves à l'entrée en sixième qui peuvent être sollicitées pour apprendre la multiplication des nombres décimaux suivant l'enseignement dispensé, nous proposons aussi une prise en compte des indications des programmes pour envisager des projets d'enseignement réalisables en classe.

CHAPITRE 1

ENSEIGNEMENT DES DÉCIMAUX ET DE LA MULTIPLICATION QUELS ENJEUX MATHÉMATIQUES ?

Sommaire

Le premier paragraphe concerne les nombres décimaux (de manière implicite, compte tenu de la notion étudiée, les décimaux considérés dans cette recherche sont toujours positifs). Après un rappel épistémologique les concernant, nous procédons à une analyse des enjeux mathématiques dont leur enseignement est l'objet. Les représentations symboliques des nombres décimaux sont intimement liées aux problèmes qu'ils permettent de résoudre, aussi, pour présenter cette analyse, nous abordons successivement leurs différentes représentations et nous décrivons, pour chacune d'elle, les problèmes auxquels les nombres décimaux apportent une réponse. A la lumière des précédents travaux sur les nombres décimaux, nous distinguons les écritures sous la forme d'un quotient, d'une somme ou d'un produit :

- écrits sous la forme d'un quotient (par exemple $n = \frac{3}{4} = \frac{75}{100}$), nous montrons que les décimaux, comme rationnels particuliers, permettent des comparaisons et, par conséquent, répondent à des problèmes de mesure ou d'expression de relations fonctionnelles ;
- écrits sous la forme d'une somme, explicite ou implicite (par exemple, respectivement $n = \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$ ou $n = 0{,}75$), les décimaux facilitent le repérage de points d'une droite car les chiffres de l'écriture décimale sont associés à des subdivisions successives d'une graduation régulière. Sous cette forme, ils permettent d'approcher tous les réels quelle que soit la précision souhaitée ;
- écrits sous la forme d'un produit (par exemple $n = 75 * 10^{-2}$) les nombres décimaux expriment aisément la mesure d'une longueur en référence au système métrique. Le choix de l'unité adaptée permet de ne plus mentionner la puissance de dix : $0{,}75$ m $= 75 * 10^{-2}$ m $= 75$ cm [6]. Selon le même principe, les décimaux expriment aussi d'autres mesures avec le système d'unités adapté.

Dans le second paragraphe, en utilisant les travaux déjà menés sur cette opération, la multiplication est étudiée, d'abord par les problèmes qu'elle permet de résoudre et donc par ses situations de référence (que nous appelons situations multiplicatives), ensuite par ses propriétés algébriques et enfin par les différentes procédures de calcul d'un produit. Nous étudions les façons d'établir les propriétés de la multiplication suivant les situations de référence et les manières de calculer un produit de deux nombres décimaux suivant leur représentation symbolique.

Au fur et à mesure de cette étude, nous utilisons les programmes officiels et parfois quelques manuels pour indiquer les choix de choix de l'institution scolaire.

---

[6] Ces écritures qui intègrent les unités peuvent étonner. En ce qui concerne leur utilité comme leur légitimité, deux textes sont particulièrement éclairants :

CHEVALLARD Yves & BOSCH Marianna (2000), Les grandeurs mathématiques au collège – Partie I. Une Atlantide oubliée, *Petit x* n°55 [pp. 5 - 32].

PRESSIAT André (2001), *Grandeurs et mesures : évolutions des organisations mathématiques de référence, et problèmes de transposition*, premier cours du thème 4 de la XI[e] école d'été de didactique des mathématiques.

1. Les enjeux de l'enseignement des décimaux

Dans l'enseignement élémentaire, les décimaux apparaissent le plus souvent comme des nouveaux nombres, étudiés après les entiers naturels. Avant d'analyser les problèmes qu'ils permettent de résoudre suivant leur représentation symbolique, procédons à un bref rappel sur le rôle qu'ont eu les nombres décimaux dans l'histoire des mathématiques.

11. Rappel épistémologique sur les nombres décimaux

Historiquement, c'est la construction du système décimal, motivée en particulier par les nécessités du commerce, qui va permettre d'unifier le domaine numérique déjà bien pourvu mais de façon hétérogène comme en témoigne le vocabulaire : nombres absurdes, irrationnels, irréguliers, inexprimables, sourds, rompus... Rappelons que l'œuvre de Simon Stevin a contribué à nourrir le débat concernant les nombres [7] :

> Au XVI^e siècle, Stifel (1487–1567) refuse encore aux irrationnels le statut de « vrai » nombre, alors que Simon Stevin (1548–1620), qui a une réelle pratique de calcul sur les nombres décimaux - c'est lui qui introduit en Europe les fractions décimales dans un petit traité édité en flamand en 1585 -, réagit vivement pour faire reconnaître les nombres irrationnels comme des nombres à part entière. Il s'élève contre l'usage de cette terminologie « d'irrationnel », « d'inexprimable ».
>
> Le débat perdurera au cours du XVII^e siècle autour de la lecture et de l'interprétation du livre V d'Euclide. Surtout, l'essor de tous les calculs à partir de cette époque, calculs algébrique, symbolique, infinitésimal, fait éclater le cadre dans lequel il se pose. Il ne sera élucidé théoriquement qu'au XIX^e siècle par les différentes constructions des réels...

Simon Stévin expose le système décimal dans L'arithmétique (1585) sous le titre : « *La disme enseignant facilement expedier par nombre entiers sans rompuz, tous compte se rencontrans aux affaires des Hommes* » puis, dans le *Traité des incommensurables grandeurs* (paru en 1634), il approfondit la notion théorique de nombre réel. Il insiste sur le fait que la représentation décimale illimitée permet d'assimiler les irrationnels à de véritables nombres, puisqu'ils en ont les mêmes propriétés opératoires. C'est bien à la fois par l'utilisation des fractions décimales pour écrire les nombres et par les calculs sur ces fractions que l'œuvre de Simon Stevin se distingue. Comme l'écrit Georges Ifrah [8] :

> Ces fractions [9] auront certes été connues bien avant lui (...) Mais à l'exception peut-être du mathématicien musulman Ghiyat ad din Ghamshid al Kashi (première moitié du XV^e siècle), dont les travaux auront été ignorés en Occident, personne, en dehors de Stévin, n'aura eu

[7] DAHAN-DALMEDICO A. & PEIFFER J (1986), *Une histoire des mathématiques,* Paris : Seuil. [p. 103–104].

[8] IFRAH G. (1994), *Histoire universelle des chiffres*, Paris : Robert Laffont. [Tome 2, p. 463].

[9] Les fractions décimales.

> l'idée jusque-là de substituer ces fractions aux fractions ordinaires et n'aura élaboré de système de notation permettant d'unifier le domaine d'application des règles arithmétiques par un rapprochement avec celles qui s'appliquent aux nombres entiers.

En utilisant les termes de Raymond Duval [10], nous terminons ce rappel historique sur la notation décimale en disant que Simon Stevin a proposé un nouveau *registre de représentation sémiotique* qui a permis d'amorcer l'unification du domaine numérique qui a conduit aux nombres réels.

A l'école primaire, l'apport des nombres décimaux comme élément d'unification théorique ne peut être présenté. En revanche, si les fractions sont connues et utilisées, la simplification qu'apporte la notation décimale pour calculer ou pour comparer peut être montrée aux élèves. L'histoire de l'enseignement des décimaux en France depuis 1945 montre que les choix possibles sont nombreux. Avant de commencer l'étude des nombres décimaux, précisons que les programmes actuels [11] définissent la progression de leur enseignement : à l'école élémentaire, au cours des trois dernières années, les nombres décimaux sont étudiés ainsi que la multiplication de deux entiers et d'un entier par un décimal ; en sixième, la notion de décimal est approfondie et la multiplication de deux nombres décimaux est apprise.

Nous allons donc examiner, pour chaque mode de représentation symbolique, les problèmes que les nombres décimaux permettent de résoudre. Au fur et à mesure de cette étude, nous indiquons les objectifs de l'institution scolaire et leur éventuelle évolution.

12. Les nombres décimaux écrits sous la forme d'un quotient

Certaines progressions envisagent l'introduction des rationnels (écrits comme un quotient de deux entiers) avant celle des décimaux qui sont alors considérés comme des rationnels particuliers. Cet ordre semble actuellement indiqué, sans que cela soit impératif, par les instructions officielles [12], l'étude des rationnels précédant, dans le texte du programme, celle des décimaux.

> *Fractions simples*. Ecriture, comparaison de fractions de même dénominateur.
>
> *Nombres décimaux*. Ecriture à virgule, écriture fractionnaire, passage d'une écriture à l'autre ; (...)

Les compléments sur l'articulation école-collège [13] précisent :

---

[10] DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.

[11] Programme de mathématique de l'école primaire, Cycle des approfondissements, 22 février 1995. Programmes de mathématiques de la classe de sixième et accompagnements, 22 novembre 1995.

[12] Programme de mathématique de l'école primaire, Cycle des approfondissements, 22 février 1995. Ce programme est appliqué en dernière année (CM2) depuis la rentrée scolaire 1997-1998.

[13] Mathématiques : articulation école-collège, BO n°44 du 5 décembre 1996.

> A l'école primaire, seules quelques fractions simples usuelles (demi, tiers, fractions décimales) sont utilisées par les élèves, et éventuellement travaillées plus longuement dans le but d'introduire les nombres décimaux par le biais des fractions décimales.

Pour introduire les nombres rationnels, le professeur peut proposer aux élèves des situations différentes : des situations de comparaisons et de mesures, des situations de partage, ou encore des situations dans lesquelles les grandeurs sont soumises à des opérateurs. Dans ces diverses situations, le recours à des fractions n'est pas motivé par le même objectif. Le sens que les élèves construisent et attribuent à ces nouvelles écritures numériques dépend de la situation qui leur a permis de les découvrir. Notre objectif n'est pas ici d'étudier ces situations mais simplement de préciser, pour analyser l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux, les différentes façons de considérer les nombres rationnels suivant le problème auxquels ils répondent. Ces problèmes sont très bien décrits par Nicolas Rouche [14] dans *Le sens de la mesure*, nous allons utiliser cet ouvrage dans les paragraphes suivants. Lorsqu'un de ces problèmes a été choisi par un auteur pour élaborer une situation d'enseignement, nous indiquons la publication, nous décrivons la situation et, le cas échéant, nous évoquons les questions qu'elle pose, relativement à la transposition didactique.

Des rationnels pour comparer des grandeurs

Nicolas Rouche rappelle qu'on peut définir la multiplication d'une grandeur par un nombre naturel comme une addition réitérée de cette grandeur à elle−même. Par exemple, on multiplie par quatre la longueur d'un segment S en prenant la longueur du segment obtenu par quatre reports consécutifs du segment S. Si une relation d'ordre total est définie sur les longueurs, on peut comparer deux longueurs différentes. Dans certains cas que nous allons détailler dans les paragraphes suivants, on peut les situer l'une par rapport à l'autre en n'utilisant que deux nombres naturels. Cela permet d'indiquer de combien ces longueurs diffèrent. La comparaison du périmètre d'un carré et de son côté est très simple : le périmètre est égal à quatre fois le côté. La comparaison du périmètre d'un disque et de son diamètre est impossible, ces deux grandeurs ne sont pas commensurables.

Comme nous allons le présenter, une telle activité de comparaison de deux grandeurs peut conduire à l'introduction des nombres rationnels.

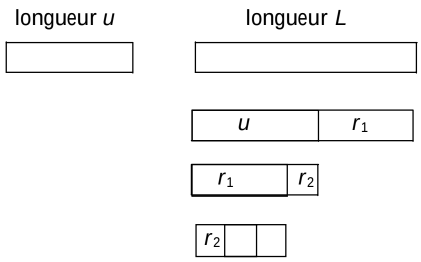
◆ *Comparaison de deux grandeurs commensurables par la recherche d'une commune mesure*. Considérons, par exemple, deux longueurs de segments u et L. La comparaison de u et de L par la recherche d'une commune mesure s'effectue comme suit :

- on reporte la petite longueur u autant de fois qu'on le peut dans la grande longueur L, on suppose qu'il y a un reste r_1 ;
- on reporte la longueur r_1 autant de fois qu'on le peut dans la longueur u, on suppose qu'il y a un reste r_2 ;

[14] ROUCHE N. (1992), *Le sens de la mesure,* Bruxelles : Didier Hatier.

- on reporte la longueur r_2 autant de fois qu'on le peut dans la longueur r_1, etc.

Par exemple, supposons que « cela tombe juste » avec u qui va une fois dans L, r_1 qui va une fois dans u et r_2 qui va exactement trois fois dans r_1.



$L = 1 * u + r_1$

$u = 1 * r_1 + r_2$

$r_1 = 3 * r_2$

Alors r_2 est une commune mesure à u et à L : r_2 va exactement quatre fois dans u et sept fois dans L. Pour comparer L et u, nous dirons que L est à u comme 7 est à *4*. Ainsi, nous avons exprimé l'égalité de deux rapports, c'est-à-dire une proportion.

En choisissant u comme longueur unité, nous pouvons dire que la commune mesure r_2 est égale au quart de l'unité ($4 * r_2 = u$). Nous écrivons $r_2 = \frac{1}{4}u$. Nous exprimons alors la mesure de L avec l'unité u en disant que la longueur L mesure sept quarts de l'unité u : $L = 7(\frac{1}{4}u)$.

Une introduction aux fractions par ce type de mesure de longueurs est proposée par Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin [15]. Les auteurs décrivent les procédures des élèves qui doivent dessiner un segment, rédiger et envoyer un message à un récepteur afin qu'il trace un segment de même longueur. La rédaction des messages conduit les élèves à mesurer leurs segments à l'aide d'une unité qui leur est fournie après le tracé. Leur tâche étant pratique, ils cherchent une mesure suffisamment précise et non une mesure théorique [16] :

> Les segments de l'émetteur et du récepteur ne coïncident pas toujours. L'erreur provient soit de la manipulation, soit d'un reste négligé par l'émetteur, soit des deux.
>
> (...) le message comporte (...) une information qualitative sur le reste « *et un tout petit peu plus* » (...)

Mais ils parviennent à exprimer la longueur L à l'aide de l'unité u, l'écriture choisie par les élèves est plutôt de type $L = u + \frac{3}{4}u$.

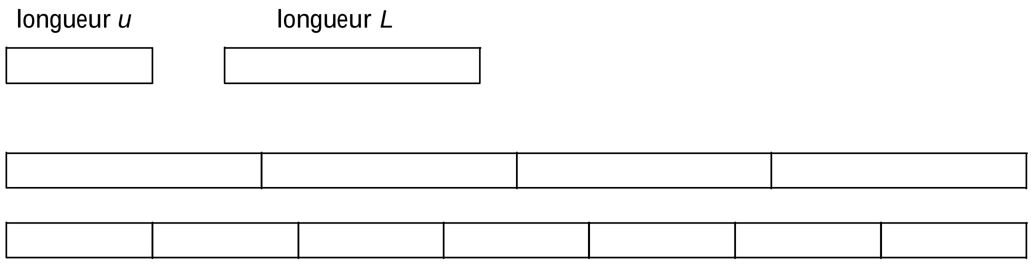
◆ *Comparaison de deux grandeurs commensurables par la méthode de coïncidence*. Reprenons les deux longueurs u et L. La comparaison de u et de L par

---

15 DOUADY R. & PERRIN M.-J. (1986), *Liaison Ecole-Collège : Nombres décimaux,* Brochure n°62, Paris : IREM de Paris 7.

16 *Ibid.* [pp. 35 et 37].

la méthode de coïncidence consiste à déterminer deux entiers n et p tels que n reports de u coïncident avec p reports de L.

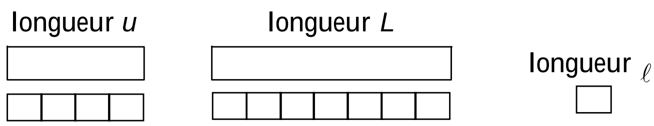


Dans le dessin ci-dessus, nous pouvons comparer les longueurs L et u : quatre reports de L coïncident avec sept reports de u. En prenant la longueur u comme unité, la longueur L mesure le quart de sept unités : $L = \frac{1}{4}(7u)$.

Une introduction aux fractions par ce type de mesure de longueurs est proposée par Guy Brousseau [17] dans l'activité de mesure des épaisseurs des feuilles de papier. Les élèves cherchent à mesurer l'épaisseur d'une pile de feuilles de papier de même épaisseur en un nombre entier de millimètres. Ils font, par exemple, coïncider 60 feuilles et 7mm et déterminent l'épaisseur de la feuille par le couple (60f ; 7mm).

Mais revenons à notre exemple où quatre longueurs L coïncident avec sept longueurs u. Nous pouvons déterminer, grâce à cette coïncidence, une commune mesure à u et à L. Supposons qu'on puisse diviser u par 4 : notons ℓ la longueur qui, reportée 4 fois, égale u. Cette nouvelle longueur ℓ est la commune mesure de u et de L :

- 4 reports de ℓ coïncident avec u ;
- 7 reports de u coïncident avec 4 reports de L ;
- donc 7 * 4 reports de ℓ coïncident avec 4 reports de L ;
- c'est-à-dire que 7 reports de ℓ coïncident avec L.



Pour comparer u et L, nous disons que u est à L comme 4 est à 7 ou bien que L est à u comme 7 est à 4. Et nous retrouvons l'expression que nous avions obtenue par la recherche directe d'une commune mesure : $L = 7(\frac{1}{4}u)$.

---

[17] BROUSSEAU G. (1998), Problèmes de didactique des décimaux, *in Théorie des situations didactiques (201–*289), Grenoble : La pensée sauvage. [pp. 257–276].

Version révisée et augmentée d'une première édition en 1981 in *Recherches en didactique des mathématiques 2/1 (37–127)*, Grenoble : La pensée sauvage.

Les deux égalités montrent l'égalité de sept quarts de l'unité et du quart de sept unités : $7(\frac{1}{4}u) = \frac{1}{4}(7u)$ ce que l'on convient d'écrire $\frac{7}{4}u$.

◆ *Distinguons les bilans des deux méthodes de comparaison*. La recherche d'une commune mesure conduit à écrire $\frac{7}{4}u$ pour $7(\frac{1}{4}u)$. Cette représentation du rationnel $\frac{7}{4}$ correspond bien au vocabulaire des fractions où 4 est le dénominateur (il indique le *nom* de la partie de l'unité c'est-à-dire le nom de la sous-unité) et où 7 est le numérateur (il indique le *nombre* de ces sous-unités). Elle correspond aussi à la façon de lire la fraction : sept quarts de l'unité.

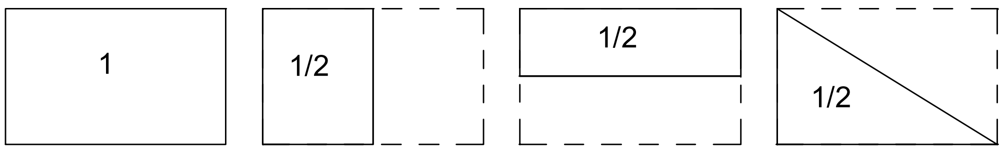
La méthode de coïncidence conduit à écrire $\frac{7}{4}u$ pour $\frac{1}{4}(7u)$. Par ailleurs, puisque quatre reports de la longueur L coïncident avec sept reports de l'unité, il s'ensuit que $\frac{7}{4}u + \frac{7}{4}u + \frac{7}{4}u + \frac{7}{4}u = 7u$ donc $4 * \frac{7}{4}u = 7u$. Nous obtenons que $\frac{7}{4}$ est le nombre x solution de l'équation $4x = 7$. Cette propriété relie la fraction à la division. En effet, $4x = 7$ s'écrit $x = 7 \div 4$ or nous savons que $x = \frac{7}{4}$.

Finalement, $\frac{7}{4} = 7 * \frac{1}{4} = \frac{1}{4} * 7 = 7 \div 4$.

<u>*Des rationnels pour fractionner des grandeurs*</u>

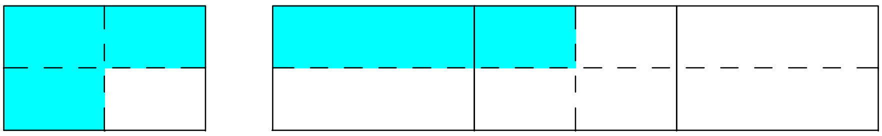
Des activités proposées aux élèves permettent de fractionner une grandeur c'est-à-dire de la découper en parts dont les grandeurs sont d'égales mesures.

◆ *Fractions de l'unité*. En pliant une bande de papier ou une feuille rectangulaire, on peut la fractionner en deux parts dont les aires sont identiques. Si la bande ou la feuille est l'aire unité, par convention d'écriture, chacune des aires des deux parts est notée $\frac{1}{2}$. Dans ce type d'activité, on fait remarquer aux élèves que deux parts de formes différentes peuvent être notées par la même fraction. C'est le cas dans le pliage d'une feuille rectangulaire suivant que l'élève la plie le long de la largeur, de la longueur ou d'une diagonale.



Sur cet exemple, de façon plus générale, l'écriture $\frac{1}{n}$ désigne l'aire d'une part lorsqu'il en faut n pour paver la feuille, et $\frac{p}{n}$ désigne l'aire de la part obtenue par juxtaposition de p parts d'aire $\frac{1}{n}$. On retrouve ici la valeur $\frac{1}{n}$ comme sous-unité (n est le dénominateur) et p comme le nombre de ces sous-unités (p est le numérateur). Ce type d'activité est proposé par Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin dans leur ingénierie pour l'enseignement des nombres décimaux [18]. Les fractions permettant à la fois d'exprimer des longueurs et des aires, les élèves pourront déterminer le produit de deux rationnels par l'aire du rectangle dont les dimensions sont précisément ces deux facteurs rationnels.

◆ *Fraction de plusieurs unités*. Le fractionnement par pliage peut être proposé sur une feuille qui représente plusieurs unités d'aire. Cette activité permet de retrouver l'autre signification de la fraction $\frac{p}{n}$ c'est-à-dire l'aire obtenue par le fractionnement d'une surface qui mesure p unités en n parts de même mesure. Par superposition, on retrouve l'égalité entre trois quarts de l'unité et le quart de trois unités :



Le fractionnement de plusieurs unités permet de retrouver aussi que $\frac{3}{4}$ est la solution de l'équation $4x = 3$. En effet, $\frac{3}{4}$ étant le quart de trois unités, on obtient ces trois unités en prenant quatre fois $\frac{3}{4}$. Cette situation tisse le lien entre la division et le fractionnement : $4 * x = 3$ s'écrit $x = 3 \div 4$ or $x = \frac{3}{4}$.

Des rationnels pour opérer sur les grandeurs

Les rationnels peuvent encore être présentés comme des opérateurs appliqués à des grandeurs. L'exemple le plus souvent repris est celui proposé par Guy Brousseau [19] : l'agrandissement de puzzles. La fraction-mesure a déjà été manipulée par les élèves comme un ensemble de couples (nombres de feuilles, nombre de millimètres) pour évaluer l'épaisseur de feuilles de papier. Dans cette nouvelle présentation, la fraction-opérateur est un autre ensemble de couples : les couples (longueur initiale, longueur image) dans une situation d'agrandissement de figures planes sans déformation. Le meilleur représentant de cet ensemble est le couple (unité, image de l'unité).

[18] DOUADY R. & PERRIN M.-J. (1986), *Op. cit.* [pp. 51-62].

[19] BROUSSEAU G. (1998), *Op. cit.* [pp. 237-241].

Le rationnel $\frac{7}{4}$ représente l'image de 1 dans l'agrandissement qui, à 4, associe 7 ($4 \mapsto 7$) ou qui, à 8, associe 14 ($8 \mapsto 14$), ainsi peut-on calculer l'image de toute longueur entière en la multipliant par $\frac{7}{4}$. On utilise implicitement une propriété des fonctions linéaires : $f(n) = n\, f(1)$. Remarquons que dans cette présentation, $\frac{7}{4}$ est envisagé comme un opérateur mais les nombres 4 et 7 ne sont pas envisagés eux-mêmes comme des opérateurs. Dans cette perspective, $\frac{7}{4}$ se compare à d'autres opérateurs. Pour comparer $\frac{7}{4}$, $\frac{8}{4}$ et $\frac{6}{4}$ c'est-à-dire les coefficients de ($4 \mapsto 7$), ($4 \mapsto 8$) et de ($4 \mapsto 6$), on se réfère à l'image de 4, on déduit que $\frac{7}{4}$ est inférieur à $\frac{8}{4} = 2$ (on agrandit plus quand on obtient 8 à partir de 4 que quand on obtient seulement 7) et que $\frac{7}{4}$ est supérieur à $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. D'une façon analogue, pour comparer $\frac{7}{4}$, $\frac{7}{3}$ et $\frac{7}{5}$ c'est-à-dire les coefficients de ($4 \mapsto 7$), ($3 \mapsto 7$) et ($5 \mapsto 7$), on se réfère à l'antécédent de 7, on déduit que $\frac{7}{4}$ est inférieur à $\frac{7}{3}$ (on agrandit plus quand on obtient 7 à partir de 3 que quand on obtient 7 à partir de 4) et que $\frac{7}{4}$ est supérieur à $\frac{7}{5}$. Ces comparaisons contribuent à conférer aux fractions-opérateurs le statut de nombre.

On peut aussi présenter une fraction comme le résultat de la composition de deux opérateurs appliqués à une grandeur. Le numérateur et le dénominateur sont ces deux opérateurs, le premier multiplie et le second divise. Par exemple, $\text{—}\boxed{*\ \frac{7}{4}}\!\rightarrow$ est le résultat de la composition des deux opérateurs : $\text{—}\boxed{*\ 7}\!\rightarrow$ suivi de $\text{—}\boxed{\div\ 4}\!\rightarrow$ ou bien $\text{—}\boxed{\div\ 4}\!\rightarrow$ suivi de $\text{—}\boxed{*\ 7}\!\rightarrow$. Les programmes du 2 janvier 1970 ont introduit l'enseignement de ces opérateurs de façon abstraite : l'attention ne devait pas être portée sur la grandeur initiale, la transformation et la grandeur image mais principalement sur la transformation. Les programmes du 7 juillet 1978 (ils tentent de rompre avec la distinction, sur laquelle nous reviendrons, entre les décimaux-mesures et les fractions-opérateurs) pointent l'intérêt d'utiliser ces compositions d'opérateurs pour éclairer la multiplication des décimaux : « *ainsi, 'mult. 3,761' revient à composer 'mult. 3 761' et 'div. 1 000'*. » Nicolas Rouche émet quelque réserve quant à l'utilisation de cette façon de considérer une fraction [20] :

[20] ROUCHE N. (1992), *Op. cit.* [p. 158].

> Cette façon d'envisager la fraction est assez abstraite du fait qu'elle tend à détourner l'attention des grandeurs sur lesquelles on opère pour la concentrer sur les opérations elles-mêmes et leur enchaînement. Comme les grandeurs ne sont sans doute jamais totalement absentes de l'imagination, on peut dire que la fraction conçue comme pur produit de deux opérateurs est une vue extrême qui tend parfois à s'établir dans la pensée, mais sans jamais s'imposer complètement. C'est en tout cas une vue élaborée dont on peut douter qu'elle décrive jamais l'intuition spontanée d'un enfant.

Devons-nous interpréter cette réserve comme une critique a posteriori de cette partie des programmes, aujourd'hui abandonnée, dont l'ambition de formation mathématique serait jugée, par son excès, inadaptée au développement des élèves ?

La fraction-opérateur permet, en théorie, de définir aisément la multiplication de deux rationnels (ce qui n'est pas le cas pour l'addition) : le produit est la fraction qui correspond à la composée de deux opérateurs. Guy Brousseau propose de telles activités en cumulant deux agrandissements d'une figure plane à l'aide de pantographes [21]. Les grandeurs sur lesquelles opèrent les agrandissements sont ici omniprésentes, la réserve émise par Nicolas Rouche concernant la composition d'opérateurs ne concerne donc pas cette situation.

Présentation des nombres décimaux comme des rationnels particuliers

Avec les rationnels, les additions et les comparaisons conduisent souvent à de longs calculs. Cette contrainte est exploitée pour privilégier les nombres dont une écriture fractionnaire a pour dénominateur une puissance de dix. C'est ainsi que les auteurs qui ont choisi cette introduction des décimaux présentent les rationnels particuliers que sont les décimaux. Citons Guy Brousseau [22] :

> Mais il se trouve que parmi toutes les opérations que l'on peut faire avec les rationnels sous leur forme fractionnaire, les plus longues, les moins faciles, sont justement les comparaisons et les sommes ou les différences. De telle sorte que, pour des raisons d'efficacité, les enfants vont très vite choisir d'eux–mêmes, parmi les fractions rationnelles, certaines - les décimales - qui permettent à la fois des calculs rapides et une représentation commode - une approche - des mesures rationnelles.

Citons aussi Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin [23] :

> A partir des $\frac{1}{100}$; les élèves ont définitivement opté pour le calcul avec les fractions décimales (des centièmes, des millièmes), tant les calculs devenaient complexes. (...) Avec les fractions décimales les calculs sont plus faciles (...) Il reste que l'écriture est très lourde (...) le maître propose

[21] BROUSSEAU G. (1998), *Op. cit.* [pp. 225-234].

[22] *Ibid.* [p. 224].

[23] DOUADY R. & PERRIN M.-J. (1986), *Op. cit.* [pp. 148-150].

> aux élèves de chercher une écriture plus simple où on n'ait pas besoin d'écrire tous ces 0.

Nous étudierons ces activités dans le chapitre consacré aux matériaux dont les professeurs disposent pour enseigner la multiplication des décimaux. Voyons maintenant les nombres décimaux écrits sous la forme d'une somme, c'est-à-dire par exemple, $6 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100}$ et remarquons que la notation décimale 6,37 en constitue un autre exemple où l'addition est implicite.

13. Les décimaux écrits sous la forme d'une somme

Comme nous l'avons déjà indiqué, une pratique préconisée par les instructions officielles, sans toutefois être imposée, consiste à présenter les nombres décimaux à partir des fractions décimales. Cette pratique est actuellement courante (voir la citation ci-dessous). Néanmoins, pour répondre à l'objectif des programmes quant à la connaissance des nombres décimaux, le professeur ne doit pas limiter son enseignement à une conception fractionnaire du nombre décimal et à une transformation de la fraction décimale en une écriture à virgule [24] :

> Plusieurs aspects sont à mettre en place concernant les nombres décimaux : l'écriture à virgule est une autre écriture des fractions décimales, les décimaux sont de bons outils pour la mesure des grandeurs, pour repérer des points sur la droite numérique (aspect important pour la comparaison, l'encadrement, les approximations...), les décimaux permettent d'approcher les quotients de deux entiers, (...)
>
> Ces différents aspects sont en général travaillés dès l'école primaire, l'introduction par les fractions décimales étant aujourd'hui la plus fréquente.

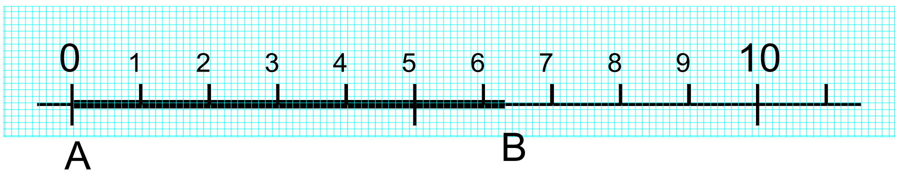
La méthode de coïncidence ou la détermination d'une commune mesure d'un segment donné avec un segment unité permet, nous l'avons vu, de mesurer des longueurs exprimées à l'aide de nombres rationnels. La présentation des nombres décimaux qui répondent aux besoins de mesurer des grandeurs peut alors être envisagée par le professeur à partir des fractions. Cependant, les auteurs des instructions officielles paraissent préférer les décimaux aux rationnels pour la mesure des grandeurs et le repérage des points : « *les décimaux sont de bons outils pour la mesure des grandeurs, pour repérer des points (...)* ». Cette formulation semble insister sur la nécessité d'une multiple présentation des nombres décimaux, des résolutions d'équation du type $ax=b$ avec les fractions, des comparaisons, des encadrements, des approximations... avec la notation décimale et des mesures avec l'utilisation d'un système d'unités adaptées. Le professeur peut donc choisir de mettre en relation le système métrique avec le système de numération décimale en utilisant la « droite numérique » c'est-à-dire, à l'école élémentaire, une demi-droite graduée à partir de zéro.

[24] Mathématiques : articulation école-collège, BO n°44 du 5 décembre 1996.

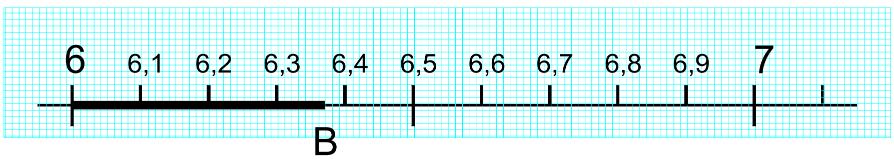
Subdivisions successives de l'unité de mesure

Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin utilisent cette écriture des décimaux pour mesurer les longueurs des côtés des rectangles dont il faut calculer l'aire. Durant une longue phase, les élèves n'écrivent pas 6,37 mais $6 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100}$. C'est au moment de multiplier les nombres avec cette représentation que les élèves en viennent volontiers à la notation décimale qui allège l'écriture.

On trouve généralement ce type de représentations dans les manuels pour le CM2 [25] ainsi que dans des brochures destinées aux enseignants [26], le fil conducteur des activités est généralement le suivant. Soit un segment [AB] à mesurer, on dispose d'une unité de longueur et d'une graduation. Le « mesurage » montre que la mesure de la longueur du segment [AB] est comprise entre les deux nombres entiers 6 et 7 ; ce qui n'est pas très précis...



Le professeur, ou l'énoncé de la fiche d'activité, propose de mieux voir ce qui se passe entre 6 et 7 en agrandissant dix fois cet intervalle. On subdivise alors le segment compris entre 6 et 7 qui mesure une unité de longueur, en dix segments de longueur $\frac{1}{10}$ et on complète la graduation en marquant $6+\frac{1}{10}$, $6+\frac{2}{10}$... que l'on écrit 6,1, 6,2... en utilisant les résultats du travail déjà effectué sur les fractions décimales et l'écriture décimale : $6+\frac{1}{10} = \frac{60}{10} + \frac{1}{10} = \frac{61}{10} = 6{,}1$. Le mesurage montre alors que la longueur du segment [AB] est comprise entre 6,3 et 6,4 ; ce qui est plus précis mais...



Le professeur propose de mieux voir ce qui se passe entre 6,3 et 6,4 en agrandissant dix fois cet intervalle. On subdivise alors le segment compris entre 6,3 et 6,4 qui

---

[25] Les manuels de CM2 utilisent un « zoom * 10 » sur la droite numérique pour présenter les décimaux (ou fractions décimales), pour situer un point sur la droite, pour comparer deux décimaux, ou pour montrer qu'entre deux décimaux ayant exactement n décimales (la $n^{\text{ième}}$ est non nulle) il existe exactement 9 nombres ayant exactement $n+1$ décimales. Par exemple :

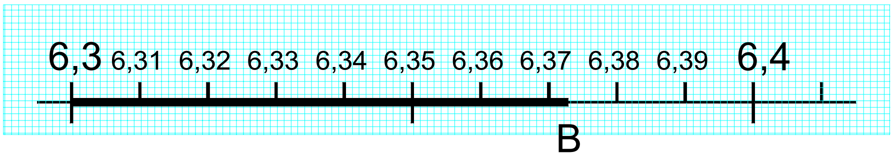
Math et calcul CM2 (1988), Paris : Hachette. [p. 108] ;

Math outil CM1 (1997), Paris : Magnard. [p. 157] ;

Math élem. CM2 (1998), Paris : Belin. [pp. 72, 88].

[26] Groupe Nouveaux programmes de Collège (1996), *Activités pour la classe de sixième : Nombres décimaux – Aires et Périmètres*, Montpellier : IREM de Montpellier 2. [pp. 14-32].

mesure $\frac{1}{10}$ unité de longueur, en dix segments de longueur $\frac{1}{100}$ et on complète la graduation en marquant $6{,}3+\frac{1}{100}$, $6{,}3+\frac{2}{100}$... que l'on écrit 6,31, 6,32... Le mesurage montre alors que la longueur du segment [AB] est comprise entre 6,37 et 6,38 ; ce qui est plus précis mais...



Dans les manuels, le processus s'arrête après un nombre fini d'étapes (généralement trois ou quatre) soit parce que le point B est précisément situé sur une marque de graduation, soit parce que la précision de la mesure est jugée suffisante. Mais, sur le plan théorique, il se peut que ce processus ne s'arrête jamais. La mesure du segment [AB] est alors exprimée par une écriture décimale illimitée.

Les écritures décimales illimitées

L'activité que nous venons de décrire repose sur un postulat selon lequel tout point de la droite numérique peut être associé à un nombre. Une conception unificatrice de la notion de nombre s'en dégage, un nombre est un représentant d'un point de la droite numérique. Cette conception permet de présenter de la même façon tous les nombres réels positifs, elle permettra aussi d'absorber les nombres relatifs quand, au collège, la droite numérique sera graduée dans les deux sens...

Cette activité permet aussi d'aborder le cas de nombres qui auraient une écriture décimale illimitée. Les écritures décimales illimitées posent un problème d'enseignement : la situation pratique n'est pas la même si l'on obtient, pour la longueur du segment [AB], la mesure 6,372999... ou la mesure 6,373000... Et pourtant ces deux résultats pratiques conduisent au même nombre pour exprimer la longueur du segment [AB]. Les instructions du 22 novembre 1971 envisageaient, pour la classe de quatrième, de traiter les développements décimaux illimités afin de présenter les nombres réels. Le problème que nous venons d'évoquer n'était pas ignoré : « *On fera comprendre qu'il n'existe pas de développement entre 7,220000... et 7,21999... ce qui conduit à identifier de tels développements* ».

Aujourd'hui, aucun apprentissage n'est associé à ces nombres. Néanmoins, des nombres qui ont une écriture décimale illimitée sont rencontrés par les élèves lors de la division de deux entiers « poussée après la virgule ». Pour convaincre leurs élèves que « la division ne s'arrêtera jamais », les enseignants expliquent souvent que la suite des décimales comporte une période qui se perçoit bien à partir du moment où l'on obtient un reste qui a déjà été obtenu. Et cela ne manquera pas d'arriver puisque le nombre de restes possibles est limité. Certains professeurs de collège évoquent aussi le fait que 0,999... et 1 désignent le même nombre en utilisant les deux écritures du tiers, $\frac{1}{3}$ et 0,333... :

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots \text{ donc } 3 * \frac{1}{3} = 3 * 0{,}333\ldots \text{ or } 3 * \frac{1}{3} = 1 \text{ et } 3 * 0{,}333\ldots = 0{,}999\ldots$$

La propriété « tout nombre dont l'écriture décimale illimitée est périodique à partir d'un certain rang peut s'écrire comme le quotient de deux entiers » n'est pas enseignée. On obtient, par exemple, une écriture fractionnaire du nombre $a = 3{,}8757575\ldots$ que l'on note $3{,}8\underline{75}$ par le raisonnement suivant :

$$\begin{array}{lrcl}
 & 10\,a & = & 38{,}\underline{75} \\
\text{et} & 1000\,a & = & 3\,875{,}\underline{75} \\
\text{donc} & 990\,a & = & 3\,875{,}\underline{75} - 38{,}\underline{75} \\
 & & = & 3\,875 - 38 = 3\,837 \\
\text{et donc} & a & = & \dfrac{3\,837}{990} \\
\text{soit, en simplifiant :} & a & = & \dfrac{1\,279}{330}
\end{array}$$

Cette propriété permettrait de conclure une première étude des nombres. Les nombres de la droite numérique sont les nombres réels, tous ces nombres ont une écriture décimale, la partie décimale étant éventuellement illimitée. Les nombres réels qui ont une écriture décimale illimitée périodique à partir d'un certain rang sont les nombres rationnels, ils peuvent s'écrire comme un quotient de deux entiers. Les nombres réels qui ont une écriture décimale limitée sont les nombres décimaux que l'on peut écrire aussi sous la forme d'une fraction décimale ou d'une autre fraction.

Cette présentation classe les nombres selon des critères d'écriture. Ce classement apparaît tôt dans la scolarité alors que les arguments développés précédemment sont difficiles, ils ne seront accessibles que bien plus tard dans la vie des élèves si tant est qu'ils le soient vraiment durant la scolarité obligatoire. Cette présentation peut alors conduire à des confusions comme celle que nous avons trouvée dans un livre du maître [27] : « *Il s'agit d'un nombre 'périodique'. Ce n'est pas un nombre décimal.* » C'est l'inconvénient majeur de cette présentation, elle induit la conception suivante : tous les nombres ont une écriture décimale ; ceux qui n'ont pas de partie décimale sont les nombres entiers ; ceux qui ont une partie décimale limitée sont les décimaux, ils ne sont pas entiers ; ceux qui ont une partie décimale illimitée périodique sont des rationnels, ils ne sont pas décimaux. Ainsi, les nombres entiers ne seraient pas décimaux, les décimaux ne seraient pas rationnels et $0{,}\underline{9}$ ne serait pas décimal.

Cette présentation possède d'autres inconvénients. Elle repose sur le fait que les subdivisions successives de l'unité peuvent s'effectuer indéfiniment, mais, dans la pratique, de telles subdivisions sont impossibles et cela renforce la confusion entre les nombres entiers et les nombres décimaux. C'est ce que signale Guy Brousseau [28] :

[27] *Math et calcul* CM2 *Livre du maître* (1990), Paris : Hachette. [p. 170].

[28] BROUSSEAU G. (1998), Problèmes de l'enseignement des décimaux, *in Théorie des situations didactiques (165–197*), Grenoble : La pensée sauvage. [p. 173, 174].

> Même si la définition laisse entendre que toutes les unités de grandeur peuvent être divisées en dix, ces divisions, ne sont jamais - dans l'enseignement élémentaire - poursuivies impunément au-delà de l'utile et du raisonnable, même à travers la fiction commode du calcul de la division. (...)
>
> Dans ces conditions, les décimaux restent munis d'un ordre discret, celui des naturels (...)
>
> Souvent les comparaisons et les sommes de décimaux ne seront correctes que si ces derniers sont écrits avec le même nombre n de chiffres après la virgule, c'est-à-dire s'ils sont présentés dans le même Ì$_n$ (ensemble des décimaux tels que 10^n Ì$_n$ $\in$ É) et donc s'ils s'interprètent comme des naturels.
>
> Les emboîtements de ces Ì$_n$ seront malaisés dès que la situation se compliquera, surtout pour Ì$_0$, l'ensemble des naturels, car nous avons vu que si les décimaux sont au fond des naturels, les entiers ont été déclarés ne pas être des décimaux !

Guy Brousseau met bien en cause cette présentation des décimaux. Selon lui, elle ne permet pas aux élèves d'acquérir de solides compétences ni pour la comparaison ni pour l'addition. Si l'on rejette cette présentation, il reste une question à résoudre : comment montrer que les décimaux permettent d'approcher les nombres réels ? Guy Brousseau et Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin ont conçu des situations pour répondre à cette question, nous allons les décrire dans le paragraphe suivant.

Approche décimale d'un rationnel ou d'un irrationnel

Les deux situations d'approximation de réels à l'aide de décimaux élaborées respectivement par Guy Brousseau et par Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin sont bien connues des didacticiens, nous nous contentons de les rappeler car nous ne les avons retrouvées ni dans des manuels ni dans des brochures destinées aux enseignants. Ces situations ne contribuent donc pas à l'élaboration des conceptions des élèves sur les nombres décimaux à l'école primaire, sauf pour ceux dont les enseignants utiliseraient ces propositions de didacticiens...

En CM2 comme en sixième, les décimaux qui permettent d'approcher des quotients sont généralement obtenus par une mise en œuvre de la technique de la division, le problème alors posé est celui de la difficile interprétation du reste.

◆ *Le jeu du radar ou jeu de l'explorateur*. Dans la progression pour l'enseignement des rationnels et des décimaux de Guy Brousseau [29], les élèves construisent l'ensemble des rationnels, l'addition, la soustraction et la multiplication de deux rationnels, la division d'un rationnel par un entier et une

---

Version révisée et augmentée d'une première édition en 1980 in *Recherches en didactique des mathématiques* 1/1 (11-59), Grenoble : La pensée sauvage.

[29] BROUSSEAU G. (1998), Problèmes de didactique des décimaux, *in Théorie des situations didactiques (201*-289), Grenoble : La pensée sauvage.

Version révisée et augmentée d'une première édition en 1981 in *Recherches en didactique des mathématiques 2/1 (37-127)*, Grenoble : La pensée sauvage.

relation d'ordre. Alors seulement, des situations d'approximation de rationnels par des décimaux sont proposées aux élèves : le jeu de l'explorateur [30].

> Le joueur A choisit une fraction comprise entre 0 et 10 (sans la dire à haute voix). Il l'écrit sur un papier qu'il met dans sa poche. Le joueur B cherche à deviner dans quel intervalle de naturels consécutifs se trouve cette fraction. Pour cela il a le droit de poser des questions, par exemple « est-ce que ta fraction se trouve entre 7 et 9 ? » A n'a le droit de répondre que par « oui » ou par « non ». (...)
>
> Le maître (...) introduit de nouvelles règles au jeu précédent : on va essayer de continuer le jeu en essayant d'encadrer la fraction de l'adversaire dans l'intervalle le plus petit possible. (...)
>
> La difficulté consiste autant à trouver des fractions entre deux autres, qu'à comparer celle qu'on a choisie à celles du « filet » de l'adversaire (...)
>
> Cependant déjà, les encadrements décimaux apparaissent (...) les parties se déroulent beaucoup plus vite et les dénominateurs s'enflent (...) Encadrée par un intervalle très petit : 1/1 000 000 la fraction 22/7 n'est pas encore attrapée. Une discussion animée s'installe (...)

◆ *Trouver le côté du carré d'aire 27*. Dans leur ingénierie pour l'enseignement des décimaux, Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin proposent une situation de recherche des rectangles d'aire 27 [31] ; chaque rectangle est associé à un couple (a, b) où a et b sont ses dimensions et chaque couple est représenté sur un graphique. Dans cette famille de rectangles, existe-t-il un carré ? Telle est la question posée aux élèves.

> Ils procèdent par encadrement : ils nomment la mesure du côté du carré, x par exemple, et cherchent à encadrer x.
>
> $5 * 5 = 25 \qquad 6 * 6 = 36 \qquad 5 < x < 6$
>
> Le problème est de s'approcher le plus possible d'un x tel que $x * x = 27$.
>
> 1ère étape : partager en deux l'intervalle d'incertitude (...) les calculs deviennent compliqués. (...)
>
> 2ème étape : passage au $\frac{1}{10}$. (...) Nous assistons là à un conflit entre deux points de vue à prendre en compte si on veut progresser efficacement :
>
> - simplifier les calculs d'où le choix de $\frac{1}{10}$;
> - faire converger rapidement le processus de recherche du carré et donc couper en deux.
>
> 3ème étape : passage au $\frac{1}{100}$ et abandon du graphique. (...) Il reste que l'écriture est très lourde lorsqu'il s'agit de calculer le carré d'un tel nombre et d'écrire le résultat (...)

30 *Ibid.* [pp. 241-243].

31 DOUADY R. & PERRIN M.-J. (1986), *Op. cit*. [pp. 143-152].

Ces deux situations montrent que les décimaux écrits sous la forme d'une somme (y compris avec l'écriture décimale) sont des bons outils pour les approximations parce qu'ils permettent d'effectuer des calculs plus simplement et qu'ils facilitent la détermination de nombres compris entre deux autres pour affiner la précision de l'approximation. Leurs auteurs privilégient les situations où les savoirs apparaissent selon des critères d'utilité pour résoudre un problème, cela explique l'apparition tardive de l'écriture décimale : « *Il reste que l'écriture est très lourde (...)* ».

Abordons maintenant les nombres décimaux écrits sous la forme d'un produit, la puissance de dix pouvant être implicite comme lorsqu'on écrit :

2,15 m = 215 cm.

14. Les décimaux écrits sous la forme d'un produit

Comme nous l'avons vu, à l'école primaire, la présentation des décimaux sur la droite numérique par subdivisions réitérées de l'unité est toujours limitée à quelques itérations. Cette simplification permet d'enseigner parallèlement le système décimal et le système métrique : il suffit de limiter le nombre de chiffres après la virgule au rang des plus petites unités pratiquées couramment.

Une telle simplification *a priori* figurait explicitement dans les programmes de 1928 et 1945. Elle engendre une dépendance entre les nombres décimaux et les mesures ainsi qu'une altération des nombres décimaux qui sont, dans les faits, « ramenés » à des entiers.

<u>Les mesures décimales et les changements d'unités</u>

Afin de mieux montrer les conséquences d'un enseignement qui limite les nombres décimaux à l'expression de mesures usuelles, citons quelques extraits du programme du cours moyen de 1945 :

> Les élèves ont presque tous entendu parler de prix exprimés en francs et centimes, de poids exprimés en kilogrammes et grammes, de capacités exprimées en litres et centilitres, de distances exprimées en kilomètres et mètres, etc. Il importe de leur faire comprendre l'équivalence des deux expressions d'un nombre concret, soit avec deux unités, soit avec une virgule : 2 mètres et 15 centimètres = 2,15 m. (...)
>
> Il est bon que les chiffres décimaux, complétés au besoin par des zéros, correspondent à des unités pratiques. On est ainsi ramené à indiquer un nombre en francs avec deux décimales (c), un nombre en mètres avec deux ou trois décimales (cm ou mm), un nombre en kilomètres avec trois décimales (m), un nombre en litres avec deux décimales (cl), un nombre en mètres cubes avec trois décimales (dm^3), etc.
>
> *Opérations.* - Les règles de changement d'unité permettent d'expliquer - sinon de justifier - la pratique des opérations. (...) On peut justifier la règle de la virgule dans la multiplication par un double changement d'unité.

◆ Le premier effet d'un tel enseignement est, mais c'est bien le choix de simplification opéré, que *les décimaux seront implicitement limités au rang des plus petites unités pratiquées couramment* [32].

◆ Le deuxième effet qui est une conséquence directe du précédent est que les relations topologiques sur l'ensemble de ces décimaux enseignés ressemblent plus aux relations sur l'ensemble des entiers naturels qu'à celles sur l'ensemble des décimaux, citons Guy Brousseau [33] :

> (...) toutes les relations topologiques vont être perturbées et pendant longtemps : l'enfant ne trouvera pas de décimal entre 3,25 et 3,26, mais par contre, il trouvera un prédécesseur dans Ì à 3,15 : ce sera 3,14 etc. Même s'il corrige sa réponse sur tel ou tel point, les raisonnements intuitifs vont être guidés par ce modèle erroné (...)

L'exemple utilisé dans les programmes de 1945 montre comment le nombre décimal 2,15 est considéré comme un couple de deux entiers 2 et 15 et comment l'écriture décimale est restreinte à ce que nous conviendrons d'appeler un « format social » des décimaux–système métrique [34]. Chacun des deux entiers 2 et 15 est affecté de son unité, le mètre pour la partie entière, le centimètre pour la partie décimale. La partie décimale 0,15 est, elle aussi, considérée comme un entier par l'effet de l'écriture : 0,15 m = $15 * 10^{-2}$ m = 15 cm. Finalement, la partie entière est associée à l'unité principale usuelle (m, m², ℓ, kg, F...) la partie décimale à sa sous–unité usuelle (cm ou mm, dm², dℓ, g, c...). Les deux parties sont parfois mises en relation par référence à la sous–unité usuelle : 2,15 m = 215 cm. Les nombreuses études de différentes évaluations des acquis des élèves ont montré que cette conception des nombres décimaux cause de nombreuses erreurs : en 1979, une enquête de l'INRP a montré que 37% des élèves de CM2 déclaraient 3,2 inférieur à 3,135. Et parmi les élèves qui répondent que 3,135 est inférieur à 3,2, certains *rangent les décimaux en ordre inverse de la longueur de la partie décimale* [35]...

---

[32] BROUSSEAU G. (1998), Obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique, *in Théorie des situations didactiques (115–160),* Grenoble : La pensée sauvage. [p. 131].

Version révisée de deux articles :

BROUSSEAU G. (1978), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques* 4/2 (165–198), Grenoble : La pensée sauvage.

BROUSSEAU G. (1989), Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In : Bednarz and C. Garnier (eds.) : *Construction des savoirs - Obstacles et conflits (41–63).* Montréal : Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage et le développement en éducation (CIRADE).

[33] *Ibid.* [p. 132].

[34] Nous employons le mot format pour désigner un type d'écriture, comme c'est l'usage dans tous les logiciels de traitement de texte, les tableurs... L'expression « format social » d'un décimal désigne ainsi le type d'écriture de ce décimal qui respecte l'usage social.

[35] GRISVARD C. & LEONARD F. (1983), Résurgence de règles implicites dans la comparaison de nombres décimaux, *Bulletin de l'APMEP n°340*, Paris : APMEP.

◆ Le troisième effet est une conséquence sur le calcul, et particulièrement sur le calcul mental, de la conception du nombre décimal comme un couple de deux entiers : *on rencontre fréquemment chez les élèves des égalités du type 2,3 * 2,3 = 4,9 ou 17,3 + 21,8 = 38,11* [36]. Partie entière et partie décimale étant traitées séparément, n'étant jamais mises en relation, c'est le sens des opérations sur les nombres décimaux qui est perturbé.

◆ Le quatrième et dernier effet que nous énoncerons de cet enseignement qui limite les nombres décimaux à des « nombres concrets » porte sur le rapport entre les nombres rationnels et les nombres décimaux. Dans cet enseignement, une opération entre deux nombres décimaux correspond nécessairement à une opération entre les grandeurs dont ils expriment la mesure. Si un « nombre abstrait » (c'est-à-dire un nombre qui n'est pas la mesure d'une grandeur) intervient dans un calcul, ce nombre est soit entier soit une fraction mais pas un décimal. Une rupture entre décimaux-nombres concrets et rationnels-nombres abstraits est orchestrée.

> Dans tous les manuels de l'époque est cependant insérée une leçon au cours de laquelle on s'efforce de montrer qu'un nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale et inversement, ou, si l'on préfère qu'un nombre dit concret : 0,5 m peut prendre l'aspect d'un nombre abstrait $\frac{5}{10}$ opérant sur une grandeur : le mètre. Cette séance se réduit à une leçon de choses sur des écritures. Nulle part, on ne cherche à montrer que ces écritures pourraient remplir la même fonction opératoire. [37]

Les programmes qui ont succédé à ceux de 1945 n'ont pas modifié cet enseignement des nombres décimaux jusqu'en 1970. La réforme mise en place cette année là bouleverse l'enseignement du calcul à l'école élémentaire. L'écriture de nombres dans différentes bases influence la présentation des nombres décimaux qui sont alors des cas particuliers de nombres à virgules : ceux pour lesquels les groupements se font par dix. Le sens de chaque chiffre de l'écriture d'un nombre à virgule est abordé par différents exemples. Néanmoins, le nombre décimal reste le nombre de la mesure, opposé à la fraction qui reste un opérateur. Le nombre décimal reste considéré comme un entier à un changement d'unité près [38] :

> On remarquera qu'à tout nombre naturel exprimant une mesure on peut associer, par un changement d'unité convenable, un nombre décimal et qu'à tout nombre décimal on peut associer, par un changement d'unité, un nombre naturel (et cela de diverses façons).

Toutes ces remarques ont conduit l'institution scolaire à tenter de dissocier davantage, dans l'enseignement, le nombre décimal de la mesure et de ses unités.

---

[36] APMEP (1986), *Aides pédagogiques pour le cycle moyen, Nombres décimaux*, Paris. [p. 31].

[37] *Ibid*. [p. 23].

[38] Programmes et instructions officielles du 2 janvier 1970.

On remarquera notamment la différence entre « à tout nombre naturel exprimant une mesure » et « à tout nombre décimal ».

Plutôt que d'ancrer la notion de nombre décimal dans une pratique sociale, les enseignants sont invités à introduire cette notion par le problème mathématique de la mesure d'une grandeur avec une seule unité. L'objectif est de relier, dès le départ, le nombre décimal à la fraction décimale, chaque chiffre de l'écriture décimale trouvant sa signification dans la fraction d'unité qu'il représente.

Cette modification des programmes a eu aussi une conséquence concernant l'enseignement des grandeurs et de leur mesure. Dans sa thèse, Jeanne Bolon [39] a montré qu'actuellement ni les manuels pour l'école élémentaire ni ceux pour le collège ne proposent d'activités qui portent effectivement sur les grandeurs familières. Pourtant ces grandeurs interviennent dans tous les problèmes numériques issus de situations concrètes ou de la vie courante. Aussi Jeanne Bolon en propose-t-elle un enseignement spécifique que nous allons présenter maintenant.

Un essai d'enseignement des grandeurs familières

Après avoir constaté la disparition de l'enseignement des grandeurs familières dans les manuels, Jeanne Bolon, dans sa comparaison de l'ingénierie de Nadine et Guy Brousseau [40] à celle de Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin [41], remarque que [42] :

> La progression Brousseau & Brousseau inclut l'étude de décimaux liés aux grandeurs familières. Certaines grandeurs sont effectivement mesurées ou fabriquées (masses, capacités). La progression Douady & Perrin n'inclut pas d'étude de grandeurs familières (sauf la longueur).

Toujours dans sa thèse, l'auteur propose une série de douze *suggestions* progressives sous forme de fiches d'activités commentées. Trois d'entre elles portent précisément sur l'enseignement des grandeurs familières.

Dans la première suggestion [43], ces grandeurs ne sont pas effectivement mesurées mais elles sont étudiées dans des situations « quotidiennes » qui portent sur des relations additives ou multiplicatives et sur des problèmes d'approximation. L'auteur précise que

> Sur les grandeurs familières, longueurs, prix, masses, capacités, il n'est pas nécessaire de connaître les propriétés des décimaux pour faire des calculs additifs à la main. On convertit les centimes en francs ou les centimètres en mètres dès que la somme dépasse 100 ; on fait de même pour des kilomètres et mètres, pour des kilogrammes et grammes.

---

39 BOLON J. (1996), *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière Ecole-Collège,* Thèse de didactique des mathématiques de l'Université de Paris 5. [p. 208].

40 BROUSSEAU G. & BROUSSEAU N. (1987), *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire,* Bordeaux : IREM de Bordeaux.

41 DOUADY R. & PERRIN M.-J. (1986), *Liaison Ecole-Collège : Nombres décimaux,* Brochure n°62, Paris : IREM de Paris 7.

42 BOLON J. (1996), *Op. cit.* [p. 138].

43 *Ibid.* [Suggestion n°2, pp. 221-222].

La notion de nombre décimal n'est pas encore approfondie. Dans des situations multiplicatives, les élèves utilisent la calculatrice qui élimine les « zéros inutiles » et qui n'arrondit pas les mesures décimales des grandeurs en respectant le format social. Ainsi émergent des difficultés liées aux contradictions entre ce format et la notation mathématique des décimaux que les élèves doivent lever en travaillant le sens et l'utilité de ces écritures.

Dans la deuxième suggestion [44], Jeanne Bolon propose des situations où les élèves doivent communiquer sur des grandeurs mesurées avec des unités différentes afin de déterminer la plus grande. Les élèves doivent, par exemple comparer la longueur d'une ficelle rouge et celle d'une ficelle bleue sachant que la ficelle rouge a pour longueur 35 avec l'unité A, la ficelle bleue a pour longueur 4 avec l'unité B et qu'il faut 10 A pour faire un B. L'objectif est que les élèves découvrent la relation entre le nombre qui indique la mesure et l'unité de mesure pour prévoir comment varie le nombre quand l'unité est multipliée ou divisée par 10, 100... Dans la conclusion de sa thèse, Jeanne Bolon propose, entre autres, ce thème comme perspective de recherche en didactique des mathématiques [45] :

> Un autre domaine de recherche à ouvrir de nouveau serait celui des *rapports entre nombres, mesures de grandeurs, unités–étalons* dans l'esprit de ce que nous avions proposé dans notre suggestion 8. Ce domaine a fait l'objet de nombreux travaux dans la période 1960–1980 (Revuz, Colmez en particulier) dans un contexte où la logique de la déduction mathématique dominait l'approche psychologique. L'enseignement y a gagné l'indépendance entre système de nombres et mesures. Il y a probablement perdu l'approche algébrique entre mesure de grandeurs, unités–étalons et nombres.

Dans la troisième suggestion [46], Jeanne Bolon propose un travail pratique sur les conversions de mesure par changement d'unité. Ce travail n'est pas l'étude théorique et systématique d'un tableau analogue à celui de la notation décimale. Au contraire, l'objectif est d'aider les élèves à acquérir quelques repères physiques sur les grandeurs usuelles afin de pouvoir contrôler les valeurs qu'ils annoncent comme résultats dans les résolutions de problèmes. L'auteur propose des travaux pratiques où des longueurs, des masses et des volumes sont mesurées et fabriquées. Par exemple, en atelier « technologie », les élèves fabriquent plusieurs exemplaires de sacs de sable de 1 g, 1dag, 1 hg, 1 kg. Ils pourront vérifier, à l'aide d'une balance, que 10 sacs de 1 hg ont la même masse qu'un sac de 1 kg.

L'ambition de l'auteur nous semble claire. Les élèves connaissent des notations décimales utilisées socialement, mais, contrairement à ce que préconisaient les programmes de 1945, il ne s'agit pas d'introduire la notion de nombre décimal là où elle n'est pas indispensable ni, a fortiori de réduire l'enseignement des décimaux à une notation pratique couramment utilisée. Il s'agit au contraire de manipuler les grandeurs, de les mesurer avec différents

[44] *Ibid*. [Suggestion n°8, pp. 238 et 240].

[45] *Ibid*. [p. 329].

[46] *Ibid*. [Suggestion n°9, p. 239].

systèmes de mesure et de les introduire dans des situations concrètes afin que les élèves puissent résoudre les problèmes où ces grandeurs familières interviennent.

Utilisons maintenant cette étude pour décrire les objectifs de l'institution scolaire concernant l'enseignement des nombres décimaux.

A priori, quel enseignement des nombres décimaux à l'école et au collège ?

Les nombres décimaux peuvent être présentés à l'école primaire de différentes façons mais, quelle qu'en soit l'introduction trois modes de représentations symboliques correspondant à plusieurs catégories de problèmes peuvent être travaillées (ce que préconisent les instructions officielles actuelles). Dressons un bilan de cette étude pour distinguer, au niveau du sens, les différentes façons de concevoir la notion de nombre décimal.

Ecrits sous la forme d'un quotient, les décimaux servent à résoudre certaines équations du type $ax = b$, sans solution dans l'ensemble des entiers, et des problèmes numériques que ces équations modélisent. Ainsi, les nombres décimaux sont considérés comme des rationnels particuliers écrits sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$. Nous avons vu trois situations différentes qui conduisent à une telle utilisation des nombres rationnels : des situations de comparaison conduisant à la mesure de longueur, des situations de fractionnement conduisant à la mesure de longueur et d'aire, et des situations d'agrandissement de figure conduisant à l'utilisation d'opérateurs ou de fonctions linéaires. Nous distinguons finalement, au niveau du sens, le « rationnel–mesure », le « rationnel–fractionnement » et le « rationnel–opérateur ».

Les décimaux sont de meilleurs outils que les entiers pour la mesure, ils permettent, comme les rationnels, une approximation aussi précise qu'on le souhaite de la position d'un point sur une droite graduée ou de la mesure d'une grandeur. Ecrits sous la forme d'une somme ou avec la notation décimale, la résolution de ces problèmes d'approximation est simplifiée. Nous avons vu que la mesure de longueur de segment ou la situation de repérage de points sur la droite numérique conduit à l'utilisation des décimaux avec cette représentation symbolique. En référence au système métrique, les nombres décimaux sont implicitement écrits comme des produits et répondent aux problèmes de mesure des grandeurs familières. Nous retenons finalement, au niveau du sens, le « décimal–mesure », le « décimal–abscisse » et le « décimal–système métrique ».

Depuis un demi - siècle, les instructions officielles pour l'école primaire ont beaucoup évolué sur l'enseignement des nombres décimaux. Jusqu'en 1970, ils sont réduits à une écriture des mesures des grandeurs familières. Ils sont désignés comme des nombres concrets par opposition aux nombres abstraits qui n'expriment aucune mesure, qui apparaissent dans des calculs et dont la notation privilégiée est la fraction. De 1970 à 1980, c'est l'écriture décimale qui est mise en avant, traduction des nombres entiers après un changement d'unité. L'approche est plus abstraite mais l'opposition est conservée entre le nombre–mesure dont l'écriture est décimale et le nombre–opérateur dont l'écriture est fractionnaire.

Durant ces deux périodes, les opérations sur les décimaux ainsi que les techniques opératoires sont enseignées par référence aux nombres entiers, à l'aide de décalages de la virgule.

Depuis 1980, l'ambition de transformer le paysage numérique est nettement affirmée : face aux nombres entiers, les fractions et les décimaux sont les nouveaux nombres qui vont pallier les insuffisances des premiers [47] :

> Diverses situations permettront aux enfants de prendre conscience de la nécessité de disposer d'autres nombres. Ainsi :
>
> (...) la fonction « diviser par 100 » dans É n'est pas définie pour 22, pour 1 110, etc.
>
> (...) Lorsqu'on veut exprimer la mesure de la longueur d'un objet avec une unité choisie, l'ensemble des nombres naturels est peu satisfaisant, ne permettant pas de transmettre une information précise dans la plupart des cas.
>
> (...) de nombreux points ne correspondent à aucun nombre naturel. On peut chercher à affecter un nombre à d'autres points de la droite ; par exemple : au milieu du segment défini par le « point 102 » et le « point 103 ».

Comme l'indique le complément aux programmes de mathématiques pour le cycle des approfondissements de l'école primaire et pour la classe de sixième « Mathématiques : articulation école - collège [48] » paru à la fin de l'année 1996, les décimaux sont, à l'école primaire, le plus souvent présentés à partir des fractions décimales. Les facilités de calculs et de comparaisons que permettent les décimaux expliquent que ceux-ci soient privilégiés à l'école comme dans la vie courante. Mais paradoxalement, l'ambition de « libérer » les nombres décimaux de la mesure s'est accompagnée, dans les publications scolaires et donc peut-être aussi dans les pratiques, d'un abandon de l'enseignement de la mesure des grandeurs familières. Ne pourrait-on pas craindre alors une régression des capacités des élèves à résoudre les problèmes numériques courants ? Ils modélisent les situations qui, précisément, mettent en relation les grandeurs familières.

En sixième, à propos des nombres décimaux, les instructions officielles de 1996 chargent les professeurs d'une triple mission : prolonger le travail commencé à l'école primaire sur la signification des écritures décimales, introduire la notation fractionnaire des quotients d'entiers ou de décimaux et leur faire acquérir le statut de nombre, former les élèves à la résolution de problèmes numériques [49].

> On consolidera et on enrichira les acquis de l'école élémentaire relatifs à la numération et au sens des opérations en les mobilisant dans l'étude de situations rencontrées au collège. On tendra ainsi à ce que la maîtrise des techniques opératoires devienne suffisante pour ne pas faire obstacle à la résolution de problèmes. (...)

[47] Instructions pédagogiques des programmes du 7 juillet 1978.

[48] BO n°44 du 5 décembre 1996.

[49] Programmes de mathématiques de la classe de sixième et accompagnements, 22 novembre 1995.

> A l'école élémentaire l'écriture fractionnaire a été introduite à partir de l'activité de partage. (...) Dans des situations de proportionnalité, le quotient de deux nombres est utilisé comme un opérateur. On visera aussi à lui faire acquérir le statut de nombre au travers de multiples activités (...)
>
> Les problèmes sont à la fois la source et le critère des connaissances mathématiques. Mais de quels problèmes s'agit-il ? Le terme de problème *concret* utilisé dans les précédents programmes a été abandonné parce qu'il renvoi trop souvent à la seule idée de *problème de la vie courante*. (...) C'est tout le métier du professeur d'adapter la complexité des problèmes proposés à ses élèves.

A propos des nombres décimaux et des opérations, les programmes pour la classe de sixième indiquent ce qui a disparu de l'enseignement primaire : « C'est en sixième que le professeur doit désormais conduire l'apprentissage de la multiplication de deux décimaux qui était autrefois entrepris à l'école élémentaire » mais ils demandent aussi aux professeurs de revenir sur ce qui n'est pas encore acquis [50] :

> Pour les nombres décimaux courants, passer d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire et vice-versa.
>
> Sur une droite graduée : lire l'abscisse d'un point ou en donner un encadrement, situer un point d'abscisse donnée.

L'institution scolaire reconnaît explicitement que les connaissances des élèves à la sortie l'école primaire ne sont pas suffisantes [51] : « Les évaluations faites en 6e ont montré combien la signification des écritures décimales échappe encore à beaucoup d'élèves à l'entrée en 6e. » Cependant, elle ne semble pas revendiquer ce constat comme la conséquence d'une formation différente et programmée sur une durée plus longue, la scolarité de la quasi-totalité des élèves se prolongeant jusqu'en classe de troisième générale ou technologique. Pourtant, nous avons constaté depuis 1980 une évolution sensible de l'ambition des programmes à propos de la connaissance des décimaux et cette évolution pourrait expliquer des acquisitions différentes des élèves. Nous avons par ailleurs remarqué que cette évolution n'a pas été favorable à l'enseignement des grandeurs familières qui sont pourtant sollicitées dans les situations sur lesquels portent les problèmes numériques et notamment ceux qui conduisent à multiplier deux décimaux.

A la fin de l'année 1998, les derniers changements de programme pour le collège paraissent, ils concernent la classe de troisième [52]. Un paragraphe laisse la possibilité aux professeurs de proposer une réflexion sur les nombres :

> Cette partie d'arithmétique [Nombres entiers et rationnels] permet une première synthèse sur les nombres, intéressante tant du point de vue de l'histoire des mathématiques que pour la culture générale des élèves.

[50] *Ibidem*.

[51] Accompagnement des programmes de 6e, mathématiques, 1996.

[52] Programmes de troisième, BO du 15 octobre 1998.

> A côté des nombres rationnels, on rencontre au collège des nombres irrationnels comme π et $\sqrt{2}$. On pourra éventuellement démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Une telle étude peut également être mise à profit pour distinguer le calcul exact et le calcul approché.

Si la réflexion plus approfondie sur les nombres qui est envisagée peut porter sur les décimaux dans la distinction du calcul exact et du calcul approché, il reste que l'effort semble devoir porter sur l'opposition rationnel – irrationnel davantage que sur l'unité du domaine numérique. Les nombres décimaux sont donc utilisés au collège, notamment par l'introduction des calculatrices dans l'enseignement, mais aucune étude nouvelle de la notion même de nombre décimal n'est proposée après l'enseignement élémentaire.

Comme nous l'avons fait pour les nombres décimaux, nous allons maintenant nous attacher à dégager les enjeux mathématiques dont l'enseignement de la multiplication est l'objet à l'école élémentaire et au collège.

2. Les enjeux de l'enseignement de la multiplication

Depuis le changement de programme de 1995, à l'école élémentaire, les élèves étudient la multiplication de deux nombres entiers naturels ainsi que la multiplication d'un décimal par un entier. Ils apprennent des techniques opératoires ainsi que le traitement de certaines situations multiplicatives. C'est donc seulement en classe de sixième qu'ils apprennent la multiplication de deux nombres décimaux. Quel enseignement de la multiplication peut-on envisager *a priori* à l'école et au collège ? Le sens de la multiplication évolue-t-il du CM2 à la sixième ? Quelles en sont les continuités et les ruptures ? Afin de répondre à ces questions, nous nous proposons d'étudier successivement les problèmes qui nourrissent le sens de la multiplication, les propriétés de cette opération ainsi que la technique opératoire.

Au niveau de l'enseignement, l'institution scolaire prend position sur l'équilibre à trouver entre ces trois composantes du sens de l'opération - problèmes, propriétés et technique - et cette position évolue. Depuis la généralisation des calculatrices, la technique opératoire et le sens de l'opération sont souvent placées en situation de concurrence dans les différentes publications, y compris dans les instructions officielles. Paradoxalement, leur complémentarité est souvent évoquée à propos de la capacité à résoudre des problèmes numériques [53] :

> Il ne s'agit pas de rechercher une virtuosité dans le domaine du calcul, mais de donner du sens à cette opération ainsi que des moyens de contrôle aux élèves pour le calcul avec des machines.
>
> (...) On tendra ainsi à ce que la technique opératoire devienne suffisante pour ne pas faire obstacle à la résolution de problème.

[53] Programmes de mathématiques de la classe de sixième et accompagnements, 22 novembre 1995.

D'après les auteurs des programmes, l'utilisation de la calculatrice dispenserait de la virtuosité technique mais il existerait un seuil en deçà duquel le manque de technique ferait obstacle au sens. Nous constatons une évolution des objectifs de l'institution scolaire concernant la maîtrise technique car les programmes de 1945 ne mentionnent aucune précision qualitative de cette acquisition : « *Usage et pratique des quatre opérations sur les nombres décimaux* ».

L'enseignement des propriétés algébrique a, lui aussi, évolué. Les programmes de 1995 pour la classe de sixième n'évoquent pas ces propriétés de la multiplication. Après leur étude systématique durant la période de la réforme dite de « la mathématique moderne », il semble que les propriétés sont abordées seulement selon des critères d'utilité, par exemple pour le calcul mental ou raisonné qui figure au programme.

Enfin, les ambitions de formation des élèves ont subi, elles aussi, une évolution sensible en ce qui concerne la résolution de problème. La comparaison de manuels des années cinquante aux manuels actuels en témoigne. Dans les premiers, les situations et les exercices-types sont répertoriés avec leurs méthodes de résolutions. Aujourd'hui l'enseignement est davantage centré sur l'étude des nombres, les élèves sont supposés apprendre à résoudre des problèmes de manière à déterminer une méthode efficace en face d'une situation, même si elle n'a pas été déjà rencontrée.

Afin de déterminer les enjeux de l'enseignement de la multiplication, nous étudions premièrement les problèmes qu'elle permet de résoudre, nous abordons ensuite les propriétés de cette opération et les procédures de calcul du produit de deux nombres décimaux.

21. Les problèmes que la multiplication permet de résoudre

En reprenant la terminologie utilisée par Gérard Vergnaud [54] dans la théorie des champs conceptuels, nous appellerons *situation multiplicative* toute situation de laquelle est issu un problème que la multiplication permet de résoudre. Durant les périodes de découverte et d'apprentissage de cette opération, les situations multiplicatives étudiées fournissent les premiers produits de deux nombres, rendent compte de propriétés algébriques de la multiplication et permettent d'envisager des méthodes pour calculer. Elles peuvent conduire à tisser le lien entre la technique opératoire, le principe de numération décimale et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

La multiplication, une addition réitérée

- Quand la multiplication n'est plus qu'une addition

L'addition réitérée trois fois du nombre 58 est 58 + 58 + 58. Cette addition s'écrit 58 * 3, on dit que 58 est multiplié par 3, le résultat de la multiplication est le produit de 58 par 3. De nombreuses situations issues du quotidien permettent

[54] VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels, *in Recherches en didactiques des mathématiques 10/2.3 (133-170),* Grenoble : La pensée sauvage.

d'illustrer cette définition de la multiplication de deux nombres entiers, citons par exemple les instructions officielles du 20 juin 1925 :

> Nous avons trois sacs de billes qui renferment 58, 23 et 36 billes. Nous réunissons toutes ces billes dans un quatrième sac. Il y aura (58 + 23 + 36) billes.
>
> (...) J'ai maintenant trois sacs de billes. Ils contiennent tous les trois le même nombre de billes, 58 par exemple. Combien aura-t-on de billes dans un quatrième sac où on les vide tous les trois ? Le résultat est encore celui d'une addition : (58 + 58 + 58) billes. *Une pareille addition où tous les termes sont égaux, s'appelle une multiplication.*

Janine Rogalski, dans sa thèse sur l'acquisition de la bidimensionnalité remarque [55] :

> Avant la réforme des années soixante-dix (...) Cette représentation de la multiplication comme addition réitérée est un invariant à la fois au cours du temps et dans les divers niveaux scolaires où elle est entreprise. On la retrouve dans les livres d'arithmétique à l'usage des classes de 6ème, 5ème, 4ème ou 3ème.
>
> Avec cet invariant vont de pair un certain nombre de caractéristiques de l'enseignement de la multiplication :
>
> - le multiplicande est un nombre « concret » ;
> - le multiplicateur est un nombre « abstrait » (sans dimension).
>
> Il est rarissime que la mesure des surfaces et volumes soit citée comme une exception à cette règle (...)
>
> Autre caractère lié au précédent : les problèmes posés sont toujours du type « isomorphisme de mesure » au sens de Vergnaud et jamais du type « produit de mesure ».
>
> Donc l'enseignement avant la réforme des années soixante-dix « linéarise » complètement les problèmes de la multiplication, ne les met pas en rapport avec la combinatoire du produit cartésien pas plus qu'avec le produit de dimensions « physiques » (...)

Cette présentation de la multiplication apparaît comme très économique pour l'enseignement : la nouvelle opération multiplication n'est qu'une forme nouvelle de la précédente, l'addition. Il reste à construire la table de multiplication, à faire apprendre la technique opératoire et à proposer des exercices dont les situations sont fidèles au modèle référent : l'élève reconnaît le modèle donc l'opération, il la pose, il l'effectue puis il résout le problème.

◆ Une définition contestée

De nombreux auteurs ont développé des arguments pour s'opposer à ce choix de présentation de la multiplication, citons par exemple Jacques Lecoq dès 1976 [56] :

---

[55] ROGALSKI J. (1985), *Acquisition de la bidimensionnalité,* Thèse d'Etat. [Partie V. pp. 4 à 7].

[56] LECOQ J. (1976), *La multiplication des naturels à l'école élémentaire,* Brochure Elem Math II, Paris : APMEP.

On a, dans ces conditions, $\underbrace{p+p+\ldots+p}_{n \text{ termes}}$ objets et l'on désigne ce nombre par le symbole $p * n$.

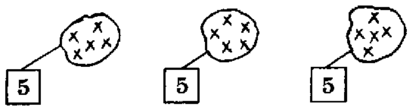
Cette définition - ou plutôt cette introduction, au demeurant légitime - est-elle bien adaptée aux enfants du CE ?

1. Dans la définition évoquée ci-dessus, *n* et *p* ne se réfèrent pas à des objets de même nature. En effet, au niveau de la manipulation, *n* désigne le nombre des ensembles ayant chacun *p* objets. De même, au niveau numérique, p désigne le nombre qui est répété dans l'écriture « *p* + *p* + ... + *p* », tandis que *n* désigne le nombre de répétition du symbole *p*.

2. La remarque précédente a conduit à des abus. On a parfois imposé de substituer « *n* * *p* » à « *p* + *p*... + *p* » de façon à lire « *n* fois *p* » sans doute par référence à la phrase « il y a *n* fois *p* objets dans la situation concrète étudiée ». Une telle convention est fâcheuse puisqu'une des propriétés de la multiplication est d'être commutative (...)

3. Cette présentation de la multiplication à partir de situations concrètes introduit des difficultés d'ordre perceptif chez l'enfant. Il doit en effet percevoir simultanément : des collections 2 à 2 disjointes (il y en a *n*), des objets (il y en a *p* dans chaque collection et *n* * *p* en tout), des correspondances 1 à 1 (pour s'assurer que les collections ont bien le même nombre *p* d'objets)

4. Fonder la multiplication sur la réunion de collections disjointes conduit parfois à représenter les situations concrètes par des dessins du type :



(...) si l'on souhaite dépasser le stade du dénombrement des objets de la réunion (5+5+5) et donner aux enfants un véritable outil d'exploration, alors ce type de représentation est peu efficace. On le verrait bien en essayant de visualiser une égalité telle que :
9 * (8 + 5) = (9 * 8) + (9 * 5) par des dessins analogues aux précédents. (...)

5. N'ayant pas de représentation bien adaptée au problème à étudier, il est inévitable, et on constate effectivement, dans les classes que l'étude de la multiplication se situe presque exclusivement au niveau des écritures (...)

D'autres arguments sont venus compléter la liste :

- si la distributivité à droite se perçoit bien, il n'en va pas de même de la distributivité à gauche ;

- la multiplication de *n* par 0 et par 1 n'entrent pas dans le cadre de la situation de référence alors que la multiplication de 0 et de 1 par *n* se calcule bien, cela contribue à masquer davantage la commutativité ;

- si l'addition réitérée permet aisément de prolonger la notion de multiplication au produit d'un décimal par un entier, elle ne peut s'étendre au produit de deux décimaux ;

- avec l'addition réitérée, la multiplication est une opération qui agrandit « toujours ». Cette propriété est une source d'erreurs dans de nombreux problèmes qui demandent le calcul du produit d'un nombre par un nombre inférieur à l'unité, les élèves ne percevant pas le modèle multiplicatif de la situation.

Plus récemment, Rémi Brissiaud [57] a formulé une constatation surprenante : en 1930, les pédagogues préconisent une méthode « reconstructive » de l'apprentissage, ils optent - dans les programmes de 1923 - pour une multiplication conçue comme une addition réitérée, et pourtant, en ce qui concerne l'apprentissage de la table de multiplication, ils n'envisagent qu'une méthode « reproductive », ignorant les tentatives marginales mais récurrentes d'utilisation de tables d'additions réitérées. Les tables traditionnelles (3 * 1, 3 * 2, 3 * 3...) conduiraient, plus sûrement et plus rapidement à la mémorisation que les tables d'additions réitérées (1 * 3, 2 * 3, 3 * 3...). Rémi Brissiaud, dans son article, propose une explication. Un élève qui recherche 3 * 6 à partir de 3 * 5 pensera qu'après 15, il y a 15 + 3 donc 18, il adopte une *régulation spatiale* de sa reconstruction de la table. Un élève qui recherche 3 * 6 par une addition réitérée devra effectuer 6 et 6, 12 et encore 6, 18. Il se laisse guider par le mot fois, il adopte une *régulation verbale* de sa reconstruction de la table. Mais compter de 6 en 6 est plus difficile que de compter de 3 en 3. Et l'élève qui recherche 3 * 6 à partir de 6 * 3 pour n'additionner que des 3 se retrouve pris dans un rituel verbal qui consiste à compter de 3 en 3 depuis le début. Si on veut que l'élève utilise une régulation spatiale, mieux vaut donc éviter de lui faire réciter des tables d'additions réitérées.

◆ Une évolution de l'institution scolaire

Sur l'enseignement de la multiplication, nous constatons une évolution très marquée de la position de l'institution scolaire.

Dès 1945, la définition de la multiplication par l'addition était critiquée dans les programmes :

> Il est fréquent de dire que la multiplication est une addition abrégée. (...) En fait dans le cas le plus fréquent la multiplication est une convention commerciale : le prix total d'une grandeur est obtenu en multipliant le prix de l'unité par le nombre d'unités.

La critique peut laisser perplexe... mais la résolution de problèmes du quotidien était l'objectif majeur de l'enseignement du calcul.

[57] BRISSIAUD R. (1994), Penser l'usage du mot « fois » et l'interaction oral/écrit lors de l'apprentissage initial de la multiplication, in : *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (195–202), Grenoble : La pensée sauvage.

Dans cet article, Rémi Brissiaud désigne par méthode reconstructive une conception de l'enseignement qui vise ce que les élèves acquièrent la possibilité de reconstruire leurs connaissances par opposition à une méthode reproductive où l'objectif premier est que les élèves connaissent des résultats et des méthodes et sachent les utiliser. Le terme « pédagogues » désigne en particulier les auteurs des programmes, ceux des commentaires et ceux des manuels à l'attention des maîtres.

Les programmes de 1970 n'ont plus pour objectif de préparer à la vie pratique mais « d'assurer une approche correcte et une compréhension réelle des notions mathématiques liées à des techniques de résolution de problèmes ». La multiplication de deux entiers est introduite par l'étude de grilles rectangulaires et des écritures additives répétées. La multiplication d'un décimal par un entier est définie par une addition réitérée.

Les instructions officielles de 1978 pour l'enseignement primaire ne font plus référence à l'addition pour le produit de deux entiers, et c'est la première fois :

> Le nombre d'éléments d'une collection peut être donné sous la forme habituelle (exemple : 125). Mais dans certains cas, il peut être plus intéressant d'utiliser pour le désigner d'autres types d'écritures, par exemple :
>
> (...) Ecritures multiplicatives (exemples : 25 * 5 ; 7 * 6 * 15) dans le cas d'objets rangés en lignes et en colonnes, dans des situations de dénombrements.
>
> (...) En même temps que de nouveaux nombres sont introduits, il faut les désigner, par écrit et oralement, les organiser en prolongeant l'ordre et les opérations connues dans l'ensemble des nombres naturels
>
> (...) Le mode d'introduction retenu pour les nombres décimaux détermine en grande partie le choix des situations conduisant à ces prolongements.

Pourtant, alors que ces programmes viennent d'entrer en application, Denis Butlen [58] montre que sur dix manuels destinés au CE1,

> La tendance à s'appuyer essentiellement sur l'addition reste très forte (voire majoritaire) pour introduire la multiplication.

Janine Rogalski [59] précise que :

> dans la réalisation des séquences proposées et des manuels, la structure de produit cartésien ne sera jamais, à ce niveau de l'enseignement élémentaire CE et CM, dissociée d'une représentation spatiale, le plus souvent en 'matrice' lignes * colonnes. (...) le caractère linéaire du produit reste dominant voire exclusif ; le caractère bilinéaire n'apparaît pas.

Depuis 1978 les instructions officielles ne font plus référence à l'addition pour le produit de deux entiers. Quelles sont donc les situations différentes de l'addition réitérée qui permettraient d'enseigner la multiplication ?

Des situations multiplicatives indépendantes de l'addition

Certaines situations multiplicatives, qui portent pourtant sur des nombres entiers, s'interprètent autrement qu'avec un modèle additif. Gérard Vergnaud en distingue trois types.

Le premier se compose des situations qui mettent en jeu une seule mesure. Certains problèmes mettent en jeu des opérateurs, ils conduisent à la multiplication d'une grandeur par un scalaire comme, par exemple, dans le cas de

[58] BUTLEN D. (1985), *Op. cit.* [pp. 28–29].

[59] ROGALSKI J. (1985), *Op. cit.* [Partie V. pp. 8, 9].

l'agrandissement d'une figure sans déformation. Les opérateurs peuvent être composés comme dans le cas de plusieurs agrandissements successifs d'une figure, cette situation conduit à multiplier deux scalaires.

Dans le deuxième type de situations, deux mesures se composent pour donner une troisième mesure. C'est le cas par exemple pour l'aire d'un rectangle, produit de la longueur et de la largeur. C'est aussi le cas des problèmes de dénombrement qui conduisent à la recherche du cardinal d'un produit cartésien.

Enfin, le troisième type se compose des situations où deux grandeurs sont proportionnelles, le coefficient qui permet de calculer la valeur de l'une connaissant la valeur de l'autre est lui-même la mesure d'une troisième grandeur qui est la grandeur quotient des deux autres. C'est le cas des problèmes qui décrivent le mouvement uniforme d'un mobile, c'est aussi le cas des situations d'achat de marchandises avec un prix unitaire fixé. En reprenant la terminologie de Gérard Vergnaud [60], nous désignons ce type de situations comme des *situations d'isomorphisme de mesures* ou, avec le vocabulaire actuellement utilisé dans les programmes, d'isomorphisme de « grandeurs ».

Des situations multiplicatives ont été utilisées par différents auteurs pour introduire ou enrichir le sens de l'opération, nous allons en présenter succinctement cinq, souvent rencontrées dans les publications, une analyse détaillée des propositions d'enseignement de la multiplication des nombres décimaux sera l'objet du prochain chapitre.

1) Multiplication d'une longueur par un scalaire (un seul espace de mesure)

Guy Brousseau [61] propose l'étude d'agrandissements de figures planes sans déformation. Son objectif est que l'élève déstabilise le modèle additif dans cette situation pour le remplacer par un modèle multiplicatif :

longueur originale * coefficient de l'agrandissement = longueur image.

Cette situation permet aussi d'introduire les rationnels et les décimaux et de prolonger la multiplication des entiers à celle des décimaux. Pour cette raison, nous reportons son étude au chapitre suivant consacré aux propositions pour enseigner la multiplication des décimaux.

Remarquons cependant que toutes les multiplications d'une longueur par un scalaire ne correspondent pas à ce modèle, certaines d'entre elles sont en fait des additions réitérées. Le périmètre d'un polygone à n côtés est égal à la somme des longueurs de ses côtés ; dans le cas d'un polygone régulier, le calcul du périmètre est toujours noté par une multiplication. On trouve dès l'enseignement élémentaire la formule du périmètre du carré ainsi que celle du périmètre du

[60] VERGNAUD G. (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité,* Berne : Peter Lang. [pp. 161 et suiv.].

[61] BROUSSEAU G. (1998), Problèmes de didactique des décimaux, *in Théorie des situations didactiques (201*–289), Grenoble : La pensée sauvage.

Version révisée et augmentée d'une première édition en 1981 in *Recherches en didactique des mathématiques 2/1 (37–127)*, Grenoble : La pensée sauvage.

disque. L'élève est-il vraiment conduit à s'interroger sur la différence de signification du signe * dans les formules :

$$\mathscr{P} = 4 * \textit{côté} \text{ et } \mathscr{P} = \pi * \textit{diamètre} \text{ ?}$$ [62]

2) Composition de deux opérateurs multiplicatifs (un seul espace de mesure)

L'ambition de Guy Brousseau [63] étant d'identifier Í^{+} et l'ensemble $\mathscr{L}(\text{Í}^{+})$ des applications linéaires dans Í^{+}, il propose une activité de composition d'agrandissements de figures planes avec des pantographes. Le produit des coefficients de deux agrandissements est égal au coefficient de la composée des deux agrandissements. Dans l'édition de 1998 d'un recueil de textes de Guy Brousseau, l'auteur précise dans une note les différents sens du produit de deux rationnels et celle de deux entiers, en particulier [64] :

> L'application linéaire naturelle de É dans É n'est pas non plus une opération. Elle peut être identifiée avec un naturel opérant multiplicativement dans un ensemble de mesure (un demi-groupe) et il lui est associée une opération.
>
> Exemple f(3)=12 avec f=4. Pour bien marquer la différence on peut écrire f=×4. Les enseignants du primaire appelaient cela un 'opérateur' et ils écrivaient ×4(3) ou $\times 4 ^{*}$ 3 ou, avec une flèche, $3 \xrightarrow{*4} 12$ ou simplement 3 * 4.
>
> (...) La composition d'applications est une opération interne dans le semi-groupe des applications linéaires de N dans N. Elle peut être aussi interprétée comme une multiplication ×4 o ×3 = ×12.

Cette proposition permet, elle aussi, d'aborder des situations multiplicatives qui ne peuvent pas se réduire à des additions réitérées. Nous n'avons trouvé aucune reprise d'une telle activité dans un manuel scolaire ou dans une brochure destinée aux enseignants.

3) Cardinal d'un produit cartésien (produit de mesures)

Dans son étude des introductions de la multiplication à l'école primaire, Denis Butlen [65] analyse les travaux effectués en didactique des mathématiques sur la multiplication. Il constate que « *tous les travaux montrent que la définition du*

---

62 Les deux formules peuvent aussi s'interpréter de la même façon : 4 étant le périmètre du carré de côté 1 et π étant le périmètre du disque de diamètre 1, on considère le carré de côté *c* comme un agrandissement du carré de côté 1 et le disque de diamètre *d* comme un agrandissement du disque de diamètre 1, on obtient alors respectivement un périmètre de $4 * c$ et $\pi * d$.

63 BROUSSEAU G. (1998), Problèmes de didactique des décimaux, *in Théorie des situations didactiques (201*–289), Grenoble : La pensée sauvage.

Version révisée et augmentée d'une première édition en 1981 in *Recherches en didactique des mathématiques 2/1 (37–127)*, Grenoble : La pensée sauvage.

64 BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques,* Grenoble : La pensée sauvage. [pp. 210 à 216].

65 BUTLEN D. (1985), *Introductions de la multiplication à l'école primaire : histoire, analyses didactiques, manuels actuels,* Cahier de didactique des mathématiques n°19, Paris : IREM de Paris 7.

*produit de deux naturels découle immédiatement de la définition du produit cartésien de deux ensembles, l'écriture a * b désigne le cardinal du produit cartésien de deux ensembles ayant respectivement a et b éléments.* » Ces activités sont généralement proposées à l'aide d'un problème concret comme le dénombrement des bateaux que l'on peut former à l'aide de coques de 4 couleurs différentes et de voiles de 3 couleurs différentes. Le problème est alors représenté de manière spatiale, le plus souvent en tableau, parfois en arbre. Mais cette bidimensionnalité n'est pas associée à celle de dimensions « physiques » et, dans les manuels pour le CM, les problèmes restent des problèmes « linéaires » d'où les produits de dimensions sont exclus.

4) Calcul de l'aire d'un rectangle (produit de mesures)

Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin [66] proposent des situations de calcul d'aire de rectangles dont les côtés sont des nombres entiers. Cette situation est proche de la proposition des programmes de 1970 d'étude de « grilles », elle a l'avantage de permettre facilement le prolongement de la multiplication aux nombres décimaux. Nous ne détaillerons donc pas ici cette situation bien connue, nous y reviendrons dans le chapitre suivant.

Remarquons cependant que les exercices proposés dans les manuels qui portent sur la notion d'aire se limitent généralement à l'application de formules, citons Janine Rogalski [67] :

> La bidimensionnalité des formules est elle-même très peu exploitée. (...) tout aussi rares les utilisations réelles du caractère multiplicatif des formules, celles-ci sont essentiellement, sinon exclusivement, utilisées pour leur statut algorithmique : la formule, par son expression en langue naturelle, ou sa représentation symbolique, détermine des opérations à effectuer : « chercher la longueur, chercher la largeur, effectuer le produit ».

5) Situations d'isomorphisme de mesures

Il reste le cas des situations où interviennent trois grandeurs *a*, *b* et *c* telles que *a * b = c* où la grandeur *b* est la grandeur quotient des deux grandeurs *a* et *c*. C'est le cas par exemple des problèmes du type :

- nombre d'unités * prix unitaire = prix total ;
- durée du parcours * vitesse moyenne = distance parcourue ;
- volume * masse volumique = masse ;
- des conversions d'unités (par exemple : passer d'une longueur en pouces à une longueur en centimètres).

La structure multiplicative de ces situations est en fait issue du quotient de deux grandeurs (mesures). Les auteurs de « Apprentissages mathématiques en 6e » [68] font le choix de placer la notion de quotient au cœur du champ de connaissances

[66] DOUADY R. & PERRIN M.-J. (1986), *Liaison Ecole-Collège : Nombres décimaux,* Brochure n°62, Paris : IREM de Paris 7.

[67] ROGALSKI J. (1985), *Op. cit*. [Partie V. p. 16].

[68] PRESSIAT A. (1991), *Apprentissages mathématiques en 6^e*, Paris : Hatier/INRP.

liées à la multiplication et à la proportionnalité. Ils justifient théoriquement leur démarche en citant Jacqueline Lelong-Ferrand [69] :

> Une grandeur physique mesurable (masse, longueur,...) peut s'interpréter mathématiquement comme un demi-groupe abélien ordonné (la loi étant notée +) que l'on transforme, par le procédé de symétrisation en groupe abélien ordonné G. (Ce qui revient à orienter la grandeur et à lui ajouter des éléments dits «négatifs».)
>
> Si ce groupe est archimédien (...) on démontre que : pour tout a de G tel que $a > 0_G$, il existe un homomorphisme de groupes strictement croissant h_a et un seul de (G ; +) dans (Ë ; +) tel que $h_a(a) = 1$.
>
> g désignant un élément de G, $h_a(g)$ est la mesure de g quand on prend a comme unité. C'est par définition le quotient de g par a que l'on note $\frac{g}{a}$.
>
> Dans le cas où G = Ë : (...) Ë ayant de plus de 'bonnes' propriétés, il en résulte que h_a est bijectif, propriété que l'on peut utiliser pour définir la multiplication. (...)
>
> Dans cette présentation, le quotient du réel b par le réel a égal à $h_a(b)$, apparaît avant leur produit (égal à $h_a^{-1}(b)$), phénomène à relier au fait que le quotient de deux grandeurs a une signification physique alors que le produit de deux grandeurs n'en a pas (du moins pas de manière immédiate !)

Les auteurs concluent ce *petit détour vers les mathématiques supérieures* en réaffirmant la nécessité de rompre avec une multiplication réduite à une addition répétée. Nous examinerons, dans le chapitre suivant, leurs propositions à propos de la multiplication de deux décimaux.

Nous avons finalement montré qu'en plus de l'addition réitérée, des situations, dont Gérard Vergnaud distingue trois catégories, contribuent au sens de la multiplication. Quant à leur enseignement, les programmes ont beaucoup évolué : la référence à l'addition, qui était la seule interprétation de la multiplication de deux entiers en 1925, disparaît des textes officiels en 1978. Cependant les analyses de manuels effectuées durant les années 80 montrent peu de changement, qu'en est-il aujourd'hui ?

L'addition réitérée a-t-elle finalement disparu de l'enseignement ordinaire ?

Les situations multiplicatives que nous venons de présenter montrent que les possibilités existent si l'on ne veut pas réduire, dans son enseignement, la multiplication à une addition réitérée. Avec les instructions officielles de 1978, il n'y a plus aucune référence à l'addition pour le cas de deux entiers. Pour l'enseignement de la multiplication d'un décimal par un entier, en revanche, l'addition demeure l'interprétation préconisée [70] :

---

[69] Lelong-Ferrand J. (1985), *Les fondements de la géométrie*, Paris : PUF.

[70] Instructions pédagogiques des programmes du 7 juillet 1978.

> Pour l'addition et la soustraction, l'extension du sens de ces opérations au cas des nombres décimaux, ainsi que les aménagements correspondants des techniques ne posent pas de gros problèmes. Il en est de même pour la multiplication d'un décimal par un naturel, qui peut être interprétée comme une addition particulière.

Et cette interprétation est toujours d'actualité [71] :

> En sixième, il s'agit donc désormais de faire acquérir par les élèves le produit de deux nombres décimaux (...) Ce dernier apprentissage est difficile dans la mesure où il existe une rupture de sens avec les cas du produit de deux naturels et d'un décimal par un naturel, cas pour lesquels la référence à l'addition réitérée est possible pour accéder à la multiplication.

Aujourd'hui, à une exception près [72], les manuels de CE2 que nous avons consultés présentent la multiplication en liaison avec l'addition. Par exemple, on propose à l'élève de dénombrer les cases d'un tableau de quatre lignes et trois colonnes et on lui demande de conclure : $4*3 = 3*4 = 4+4+4 = 3+3+3+3$. En CM2, les manuels présentent la multiplication d'un décimal par un entier soit en référence - éventuellement implicite - à l'addition, soit de façon abstraite comme un problème technique. Nous avons aussi repéré deux manuels [73] qui proposent de s'appuyer sur les changements d'unité - francs en centimes dans un calcul de prix - pour justifier la « règle de la virgule ». En ce qui concerne les exercices proposés, un sur deux est purement technique et, pour les problèmes, 74% d'entre eux portent sur des prix ou des conversions, les autres sont du type « isomorphisme de grandeurs ».

Sur sept manuels de sixième [74], deux seulement se réfèrent à l'addition pour réviser la multiplication d'un décimal par un entier. On pourrait croire que l'addition réitérée n'est plus le modèle des situations de référence pour l'enseignement de la multiplication. Mais certains manuels ne proposent plus aucune situation multiplicative dans les pages destinées à l'élaboration des savoirs, ils restent à un niveau technique éventuellement nourri, suivant les ouvrages, d'arguments théoriques. Pour les autres, l'opération n'est pas construite en référence à la situation : on affirme purement et simplement que pour déterminer le résultat, il faut multiplier les données.

Aujourd'hui encore, l'enseignement de la multiplication en référence à d'autres situations que l'addition réitérée n'a donc pas vraiment dépassé le cadre de l'enseignement expérimental. Cette représentation de la multiplication n'est

[71] Mathématiques : articulation école–collège, BO n°44 du 5 décembre 1996.

[72] *L'heure des maths* CE2 (1999), Paris : Hatier.

[73] *Nouvelle collection Thévenet* CM2 (1996), Paris : Bordas. [p. 106].
Math outil CM2 (1997), Paris : Magnard. [p. 61].

[74] Par ordre alphabétique des éditeurs : *Décimale 6e* (1996), Paris : Belin ; *Math 6e* (1996), Paris : Bordas ; *Mathématiques 6e* (1996), Paris : Delagrave ; *Cinq sur cinq Math 6e* (1996), Paris : Hachette ; *Triangle 6e (1996),* Paris : Hatier *; Le nouveau Pythagore 6e (1996)*, Paris : Hatier ; *Le nouveau Transmath 6e* (1996), Paris : Nathan.

pourtant pas satisfaisante dans le cas de deux facteurs décimaux. La question du prolongement de la multiplication des entiers à celle des nombres rationnels est celle que nous nous proposons de traiter maintenant afin de conclure notre étude des situations qui donnent du sens à la multiplication.

Prolongement des situations multiplicatives : des entiers aux rationnels

Nous avons vu, dans le paragraphe précédent, que des situations qui permettent la construction du sens de la multiplication portent aussi bien sur des valeurs entières que sur des valeurs décimales ou rationnelles des grandeurs. Nous pourrions dire, d'une certaine manière, que c'est la situation qui légitime le prolongement de la multiplication aux nombres décimaux. Les situations multiplicatives qui se prêtent effectivement à ce prolongement sont celles qui mettent en relation des grandeurs continues - longueur, aire, masse, capacité... - et non des grandeurs discrètes. Ainsi les aires de rectangles, les agrandissements de figures planes, les prix au kilogramme, au litre ou au mètre donnent des situations qui se prêtent aisément au prolongement de la multiplication à des valeurs décimales ou rationnelles, en revanche les additions réitérées et les dénombrements d'éléments d'un produit cartésien ne s'y prêtent pas.

Encore faut-il nuancer notre propos à cause de l'addition réitérée. Il est aisé de multiplier un décimal par un entier : $7{,}80 * 2 = 7{,}80 + 7{,}80 = 15{,}6$. Ainsi, 2 kg de pommes de terre à 7,80 F/kg coûte 15,60 F. Mais si, pour multiplier, on se réfère à l'addition réitérée, comment calculer le prix de 2,5 kg ? On peut combiner addition et fractionnement : le prix de 2,5 kg s'obtient en ajoutant deux fois 7,80 F et encore une demi-fois. Détaillons le calcul :

$$7{,}80 * 2{,}5 = 7{,}80 * (2 + \frac{1}{2}) = 7{,}80 + 7{,}80 + (7{,}80 * \frac{1}{2})$$

où $$7{,}80 * \frac{1}{2} = 7{,}80 \div 2 \text{ avec } 7{,}80 \div 2 = x \text{ tel que } x + x = 7{,}80.$$

Cette combinaison de l'addition réitérée et du fractionnement est présente dans langage courant, on dit « deux fois et demie » comme on dit « deux fois plus ». En généralisant, l'addition réitérée est une conception qui permet de résoudre les problèmes de la vie quotidienne issus de situations d'isomorphisme de deux grandeurs. Cette conception de la multiplication possède une dimension sociale qui la légitime, qui justifie qu'elle a été enseignée systématiquement par le passé, alors que l'objectif de l'enseignement primaire était de donner des méthodes pour résoudre des problèmes concrets, et qui contribue sans doute à expliquer les difficultés actuelles pour intégrer d'autres situations multiplicatives dans l'enseignement ordinaire.

Nous avons étudié les différentes situations de référence de la multiplication, situations desquelles sont issus les problèmes multiplicatifs proposés aux élèves. Leur résolution nécessite la reconnaissance de l'opération ainsi que le calcul du produit. La technique opératoire repose à la fois sur le système d'écriture des nombres et sur les propriétés de la multiplication (comme nous le verrons, commutativité, associativité et distributivité par rapport à l'addition). Nous allons donc maintenant étudier *a priori* l'enseignement des propriétés de la multiplication, notamment à partir des différents types de situations que nous avons décrits et qui donnent du sens à cette opération.

22. Les propriétés de la multiplication

Comme nous le montrerons plus en détail dans le prochain chapitre, pour construire la technique opératoire de la multiplication de deux décimaux, de nombreux auteurs proposent de recourir à l'associativité et à la commutativité de la multiplication et d'utiliser la technique opératoire sur les nombres entiers. Pour multiplier 2,5 et 3,25, ils suggèrent de poser :
$25 * 325 = (2{,}5 * 10) * (3{,}25 * 100) = 2{,}5 * 3{,}25 * 10 * 100 = 2{,}5 * 3{,}25 * 1\,000$
et ils en concluent que $2{,}5 * 3{,}25 = (25 * 325) \div 1\,000$. Cette utilisation des propriétés est souvent masquée par une présentation avec des opérateurs :

$$\begin{array}{ccccc} 2{,}5 & * & 3{,}25 & = & 8{,}125 \\ \downarrow {\scriptstyle * 10} & & \downarrow {\scriptstyle * 100} & & \uparrow {\scriptstyle \div 1000} \\ 25 & * & 325 & = & 8\,125 \end{array}$$

A l'école primaire comme au collège, le professeur a seulement pour rôle de faire utiliser les propriétés des opérations : alors que le calcul mental ou raisonné figure au programme de l'école primaire et du collège, aucun apprentissage systématique n'est mentionné. Néanmoins, durant la préparation de ses cours, un enseignant envisage des éventuelles questions de ses élèves, il prévoit aussi les réponses qu'il pourrait apporter. Après avoir montré quelques exemples, un professeur qui voudrait justifier la commutativité ou l'associativité de la multiplication devra s'appuyer sur une situation modélisée par cette opération.

Nous allons étudier comment les différentes situations multiplicatives permettent de rendre compte des propriétés de la multiplication. Nous limitons dans un premier temps notre étude au cas de deux facteurs entiers, puis nous envisageons le cas des facteurs décimaux pour les situations qui permettent ce prolongement. Rappelons que nous avons distingué l'addition réitérée, le cardinal d'un produit cartésien, l'aire d'un rectangle (ou le dénombrement de points disposés en réseau rectangulaire) et les situations d'isomorphisme de grandeurs.

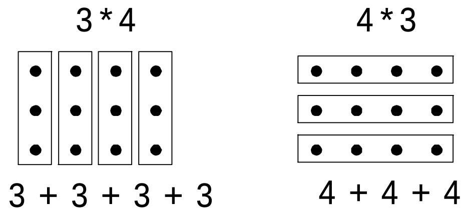
Commutativité de la multiplication

Examinons, en fonction des différentes présentations de la multiplication, comment le professeur peut enseigner la commutativité.

Addition réitérée. Dans le cas de l'addition réitérée, les facteurs entiers a et n du produit $a * n$ ne jouent pas le même rôle. Ainsi, d'après la définition,

$$a * n = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ termes}} \text{ et } n * a = \underbrace{n + n + \ldots + n}_{a \text{ termes}}$$

Pour justifier l'égalité des produits, l'enseignant pourra utiliser, par exemple, la disposition de points en réseau rectangulaire, qui est compatible avec l'addition répétée, en modifiant l'interprétation de cette disposition :



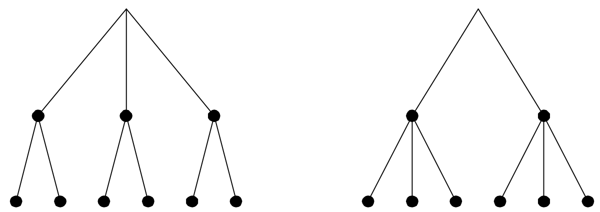
Opérateurs multiplicatifs et composition d'opérateurs. Dans le cas d'une fonction linéaire appliquée à une variable, on retrouve encore la difficulté posée par la signification des nombres dans la situation. Par exemple, en agrandissant de 5 fois un segment de 3 cm on obtient un segment de 15 cm c'est-à-dire de même longueur que celle du segment obtenu en agrandissant de 3 fois un segment de 5 cm. La commutativité n'est pas évidente non plus dans la situation de deux agrandissements successifs, car comme le signale Nicolas Rouche que nous avons déjà cité à propos de cette situation [75] :

> (...) elle tend à détourner l'attention des grandeurs sur lesquelles on opère pour la concentrer sur les opérations elles-mêmes et leur enchaînement. Comme les grandeurs ne sont sans doute jamais totalement absentes de l'imagination, on peut dire que la fraction conçue comme pur produit de deux opérateurs est une vue extrême qui tend parfois à s'établir dans la pensée, mais sans jamais s'imposer complètement »

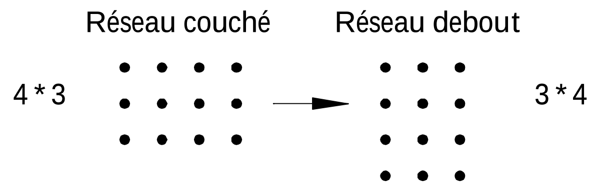
Les enseignants en classe de troisième en ont des témoignages tous les ans quand ils posent à leurs élèves le problème de savoir ce qu'il y a de plus intéressant entre l'application d'une remise de 10% avant d'appliquer la TVA ou après avoir appliqué la TVA. De nombreux commerçants savent que, bien souvent, la clientèle pense bénéficier d'une remise plus importante si elle porte sur le prix TTC...

Cardinal d'un produit cartésien. La justification de la commutativité de la multiplication est difficile avec les situations de dénombrement des éléments d'un produit cartésien. Prenons un exemple : les bateaux que l'on peut construire avec des voiles de trois couleurs différentes et des coques de quatre couleurs différentes ne sont pas les mêmes que ceux que l'on construit avec quatre couleurs de voiles et trois couleurs de coques. On peut toutefois choisir la situation pour que le rôle des nombres ne soit plus distingué. Considérons, par exemple, la situation de Maud qui doit se rendre à son cours de sport : elle dispose de trois polos et de deux shorts, le professeur demande de combien de façons elle peut s'habiller. Une représentation de ce problème avec un arbre permet de compter les tenues. Que Maud commence par mettre un des trois polos puis un des deux shorts ou qu'elle commence par mettre un des deux shorts puis un des trois polos, ne changera rien au nombre de tenues dont elle dispose ; les arbres représentant les deux façons de s'habiller seront pourtant bien différents.

[75] ROUCHE N. (1992), *Op. cit*. [p. 158]



Points en réseau rectangulaire et aire de rectangles. Dans la présentation du dénombrement des cases d'une grille ou des points d'un réseau rectangulaire, la commutativité peut être perçue comme une conséquence de la *conservation des quantités discrètes* (au sens de Jean Piaget) dans transformation « changer la position de la grille ou du réseau » :



Il en est de même dans la présentation de la multiplication par l'aire de rectangles dont les côtés sont les facteurs.

Isomorphisme de grandeurs. La commutativité n'a pas de sens dans les situations d'isomorphisme de grandeurs car les facteurs ne désignent pas la même grandeur. Empruntons un exemple aux auteurs d'un ouvrage pour la formation des professeurs des écoles [76]. Cinq kilogrammes d'oranges à dix francs le kilogramme coûtent cinquante francs. Dix kilogrammes d'oranges à cinq francs le kilogramme coûtent aussi cinquante francs. Mais l'identification des produits n'émerge pas de ces deux situations bien différentes : dans la première on achète moins d'oranges que dans la seconde, et elles sont plus chères...

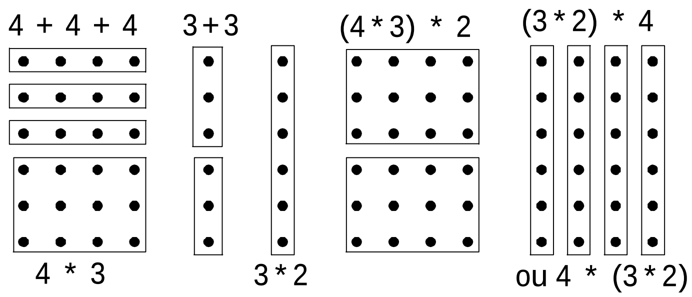
On retiendra, finalement, que certaines situations qui donnent du sens à la multiplication se prêtent mal à l'interprétation de la commutativité. Il reste pourtant fondamental que les élèves la connaissent, sachent l'utiliser et distinguent aussi les opérations commutatives de celles qui ne le sont pas.

<u>*Associativité de la multiplication*</u>

Voyons maintenant comment justifier l'associativité de la multiplication suivant les situations qui donnent du sens à cette opération.

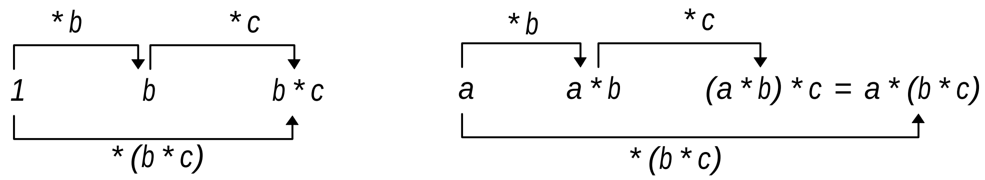
Addition réitérée. L'addition réitérée, moyennant par exemple l'utilisation de points disposés en réseaux rectangulaires permet de montrer l'associativité de la multiplication. Cela demande que la commutativité soit une connaissance mobilisable :

[76] *Tome 4. Nombres et opérations, fonctions numériques* (1993), Se former pour enseigner les mathématiques, professeur des écoles, Paris : Armand Colin, Formation des enseignants. [p. 70].



Comme précédemment, le changement de statut des nombres de la situation qu'impose l'application de la commutativité rend assez artificielle cette représentation.

Opérateurs multiplicatifs et composition d'opérateurs. Si les deux nombres b et c sont les coefficients de deux agrandissements successifs d'une figure plane et si a est la longueur d'un segment de cette figure, alors certaines manipulations conduisent à l'associativité de la multiplication comme le montre le schéma suivant :



Avec la première manipulation, le produit $b * c$ s'interprète comme le coefficient de l'agrandissement composé de l'agrandissement de coefficient b suivi de l'agrandissement de coefficient c. Avec la seconde manipulation on obtient les deux membres de l'égalité cherchée suivant que l'on considère successivement les agrandissements de coefficients b et c appliqués à la longueur a ou directement l'agrandissement de coefficient $b * c$ appliqué à la longueur a.

Cardinal d'un produit cartésien. Comme on l'a présenté pour montrer la commutativité de la multiplication, certaines situations de dénombrement se prêtent assez bien à la justification de l'associativité. Par exemple, si Raphaël dispose de 5 chemises, 3 pantalons et 2 paires de chaussures, alors $(5 * 3) * 2$ et $5 * (3 * 2)$ sont deux écritures différentes du nombre de ses tenues. Le deuxième produit demande d'utiliser la commutativité $5 * (3 * 2) = (3 * 2) * 5$ car un arbre ne peut pas représenter $5 * (3 * 2)$. La situation donne du sens aux deux produits et à leur égalité : soit Raphaël enfile sa chemise, son pantalon puis ses chaussures (ce qui correspond au produit $(5 * 3) * 2$), soit il enfile sa chemise après avoir mis son pantalon et ses chaussures (ce qui correspond au produit $(3 * 2) * 5$).

Calcul d'aire de rectangles. En ce qui concerne le calcul d'aire, si le produit $a * b$ est interprété comme l'aire d'un rectangle dont les dimensions sont a et b, alors le produit $(a * b) * c$ n'est pas, lui, interprétable comme une aire car $a * b$ n'est pas une longueur. Il faut changer de situation pour que les différents facteurs a, $(b * c)$, $(a * b)$ et c aient un sens. Théoriquement, on pourrait calculer le volume d'un pavé. Mais ces calculs, difficiles pour les élèves, ne sont pas au programme de l'école primaire.

Situations d'isomorphisme de grandeurs. La difficulté que nous avons constatée, avec les nombres liés à des grandeurs, pour justifier la commutativité, se retrouve pour l'associativité.

On retiendra que les situations qui donnent du sens à la multiplication permettent difficilement d'en montrer l'associativité. Etudions enfin le cas de la distributivité par rapport à l'addition.

<u>Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.</u>

Il faut parfois distinguer la distributivité à gauche de la distributivité à droite qui ne se justifient pas toujours l'une et l'autre suivant les présentations de la multiplication.

Addition réitérée. Avec l'addition réitérée, la distributivité à gauche est aisément démontrable, la distributivité à droite s'établit en utilisant l'associativité et la commutativité de l'addition pour des valeurs différentes de 0 et de 1 :

$$\begin{aligned}
5 * (4 + 2) &= \underbrace{5+5+5+5}_{\text{4 termes}} + \underbrace{5+5}_{\text{2 termes}} \\
&= (5 * 4) + (5 * 2) \\
(3 + 2) * 6 &= (3 + 2) + \ldots + (3 + 2) \\
&= (3 + \ldots + 3) + (2 + \ldots + 2) \\
&= (3 * 6) + (2 * 6)
\end{aligned}$$

Opérateurs multiplicatifs et composition d'opérateurs. La démonstration de la distributivité à droite est aisée avec les situations qui reposent sur des opérateurs multiplicatifs comme les agrandissements de figure plane (il suffit d'agrandir une ligne brisée composée de deux segments) mais celle de la distributivité à gauche est impossible car les opérateurs ne s'ajoutent pas. Les situations de composition d'opérateurs multiplicatifs, pour cette même raison, ne sont pas adaptées à l'illustration de la distributivité, ni à droite, ni à gauche.

Cardinal d'un produit cartésien. La somme de deux nombres étant interprétée comme le cardinal de deux ensembles disjoints dont les cardinaux sont précisément les deux termes de la somme, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition revient à établir les deux égalités :

$$\text{card } A * (B \cup C) = \text{card } (A * B) + \text{card } (A * C)$$

et $$\text{card } (A \cup B) * C = \text{card } (A * C) + \text{card } (B * C)$$

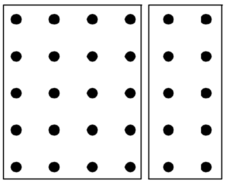
ce qui revient à montrer que les produits $A * B$ et $A * C$ sont disjoints, comme le sont $A * C$ et $B * C$, puis :

$$A * (B \cup C) = A * B \cup A * C$$

et $$(A \cup B) * C = A * C \cup B * C$$

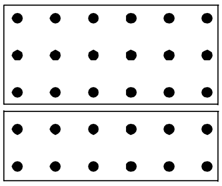
Points en réseaux rectangulaires et calcul d'aire de rectangles. Le dénombrement de points d'un réseau rectangulaire ou le calcul de l'aire d'un rectangle sont des situations qui se prêtent très bien à l'illustration de la distributivité : il suffit de « coller » plusieurs grilles ou plusieurs rectangles :

(5 * 4) + (5 * 2)



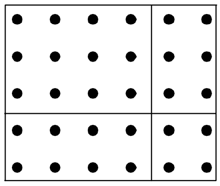
5 * (4 + 2)

(3 * 6) + (2 * 6)



(3 + 2) * 6

3 * 4 + 3 * 2 + 2 * 4 + 2 * 2



(3+2) * (4+2)

Isomorphisme de grandeurs. On peut montrer la distributivité avec une situation d'isomorphisme de grandeurs en faisant appel à la situation pour identifier les deux membres de l'égalité. Supposons que chaque jour de la semaine, sauf le samedi et le dimanche, Marie utilise un billet de transport aller - retour à 12 F et prend un déjeuner au self à 37 F. Le calcul de la somme dépensée peut s'effectuer de deux façons : le coût total du transport est 12 * 5 et celui du déjeuner est 37 * 5 soit une dépense totale de (12 * 5) + (37 * 5), ou bien l'on calcule le coût par journée (12 + 37) que l'on multiplie par le nombre de journée (12 + 37) * 5. Voyons une illustration de la distributivité à gauche. Vincent doit repeindre deux chambres, la surface à peindre de la première chambre 45 m^2 et celle de la seconde mesure 60 m^2. Vincent utilise 15 cℓ de peinture par m^2. Le calcul de la quantité de peinture nécessaire peut se calculer de deux façons, en calculant d'abord la quantité par chambre ou bien d'abord la mesure de la surface totale. On obtient (15 * 45) + (15 * 60) ou bien 15 * (45 + 60). On retrouve ce type de raisonnement avec les situations illustrant le dénombrement des éléments d'un produit cartésien.

Finalement, la distributivité est, des trois propriétés que nous venons d'étudier, celle qui se montre le plus facilement en s'appuyant sur une des situations qui donnent du sens à la multiplication. Néanmoins, nous avons constaté quelques différences entre toutes ces situations. Abordons maintenant les cas particuliers de la multiplication par zéro ou par un.

Multiplications par 0 et par 1

Ces deux multiplications sont indispensables pour effectuer des calculs puisque 0 et 1 sont deux chiffres qui, comme les autres, apparaissent dans l'écriture des nombres. Elles constituent cependant une source de nombreuses erreurs chez les élèves. Doit-on rechercher les causes de ces difficultés dans leur enseignement ou dans les mathématiques elles-mêmes ? Voyons comment on peut illustrer la multiplication par 0 et par 1, suivant les situations que cette opération modélise.

Addition réitérée. L'écriture *a* * *n* correspondant à la somme de *n* termes égaux à *a*, n'est véritablement définie que pour *n* Ã 2. Ainsi, des produits comme 0 * 7 ou 1 * 5 ne posent pas de problème alors que 7 * 0 ou 5 * 1 ne sont pas définis. La possibilité éventuelle d'admettre la commutativité réglerait le problème pour les exemples montrés mais elle ne change rien à la difficulté de représenter 1 * 0.

Opérateurs multiplicatifs et compositions d'opérateurs. Les situations qui reposent sur un opérateur multiplicatif n'ont de sens que pour les opérateurs différents de 0 et de 1. Elles permettent d'interpréter la multiplication 1 * *k* où *k* - différent de zéro et de un - est le coefficient. Par exemple, dans l'agrandissement d'une figure plane de coefficient 3, un segment de longueur 1 cm a pour image un segment dont la longueur en cm est égale à 1 * 3 = 3. Mais il sera impossible d'illustrer une des autres multiplications que nous étudions ici. La restriction des valeurs de *k* fait que le modèle de composition d'opérateurs est, lui aussi, inadapté pour rendre compte de ces deux multiplications.

Cardinal d'un produit cartésien. En reprenant la situation de dénombrement des bateaux que l'on peut construire avec des voiles et des coques de couleurs différentes, on illustrera facilement la multiplication par 1 : s'il n'y a qu'une couleur de coque, alors il y a autant de bateaux que de couleurs de voile. En revanche la mobilisation de l'ensemble vide rend délicate l'interprétation de la multiplication par 0, difficile en effet de compter les bateaux que l'on ne peut construire en l'absence de voile...

Points en réseaux rectangulaires et calcul d'aire de rectangles. La situation de dénombrement de points d'un réseau rectangulaire ne permet pas d'illustrer ces deux multiplications car il faut au moins deux lignes pour faire un réseau rectangulaire. En revanche, le calcul d'aire de rectangle permet d'illustrer une multiplication dont un facteur est 1 (l'autre étant non nul) mais pas celle ou l'un des facteurs est égal à zéro.

Isomorphisme de grandeurs. Les situations d'isomorphisme de grandeurs, ne permettent pas d'illustrer facilement les produits dont un facteur est égal à 0 ou à 1. Etudions deux exemples. Le prix d'un kilogramme de pommes qui coûtent 12 F/kg est 12 F. On ne pose pas la multiplication 12 * 1 = 12 pour répondre. C'est l'interprétation du prix par kilogramme qui donne la réponse : on paie 12 F pour 1 kg. Plus délicate encore est l'interprétation de 12 * 0 = 0 par le prix à payer lorsqu'on n'achète pas de pommes... Voyons un autre exemple. La notice d'un sirop pour nourrissons précise la posologie, « dose quotidienne : une cuillerée à café par kg » ; pour un enfant de 6 kg, le médecin a prescrit 2 cuillerées à café 3 fois par jour. La dose est bien de 6 cuillerées par jour. Le médecin a-t-il procédé par identification des valeurs ou bien a-t-il calculé 1 * 6 = 6 ? Difficile de répondre, surtout si le médecin procède par addition répétée pour multiplier.

L'examen des différentes situations qui permettent de présenter la multiplication montre qu'elles posent bien des difficultés pour donner du sens aux produits dont un facteur est égal à 1 ou à 0.

Abordons maintenant les propriétés de la multiplication de deux décimaux.

Prolongement des propriétés de la multiplication : des entiers aux rationnels

Nous avons vu que certaines situations ne convenaient pas pour montrer des propriétés algébriques de la multiplication dans le cas où les facteurs sont entiers. Parmi ces situations, certaines se prolongent aux valeurs décimales mais elles ne conviendront pas mieux, avec des facteurs décimaux. De même, en reprenant l'étude menée sur le cas des facteurs entiers, nous pouvons remarquer que, pour les situations qui portent sur des grandeurs continues (aire de rectangles, agrandissement de figures planes, isomorphisme de grandeurs continues), le fait que les facteurs soient entiers ou décimaux ne change pas l'émergence de la propriété algébrique. Elles conviennent donc tout aussi bien.

Si l'étude de l'effet de la multiplication sur l'ordre n'est pas explicitement au programme de l'enseignement primaire ni de la classe de sixième, un problème d'enseignement bien connu que pose le prolongement de la multiplication aux nombres décimaux explique que nous y consacrions tout de même un paragraphe. Si l'on prend soin d'écarter les facteurs égaux à 0 ou à 1, la multiplication par un nombre entier « augmente » le multiplicande. Autrement dit, si $a \in$ É, a Ã 1 et si $n \in$ É, n Ã 2 alors $a * n > a$ [77]. Il en résulte que, sous les mêmes conditions, $a \div n < a$. Les professeurs se trouvent confrontés à une acquisition précoce de cette propriété de la multiplication qui n'est pas conservée lors du prolongement aux valeurs décimales positives. Ainsi, certains élèves qui repéraient l'opération à effectuer pour résoudre un problème en s'appuyant sur une comparaison *a priori* du résultat de l'opération et des valeurs données, se trompent parce qu'ils continuent de multiplier pour agrandir et de diviser pour réduire.

Signalons enfin un problème, lié au sens de l'écriture décimale, posé par les multiplications dont le multiplicateur est 10, 100 ou 1 000... Ce problème est bien connu lui aussi. Pour multiplier un entier, on « ajoute des zéros », pour multiplier un décimal, on « déplace la virgule ». Mais comme il arrive qu'il faille « déplacer la virgule » et « ajouter des zéros » certains élèves appliquent ces règles alors qu'elles ne sont pour eux que des recettes imprécises qui conduisent parfois à la réussite et souvent à l'erreur.

Parce que les propriétés algébriques de la multiplication font partie des propriétés qui donnent du sens à cette opération et parce que ces propriétés sont utilisées pour établir la technique usuelle du calcul du produit de deux décimaux, nous avons étudié la commutativité, l'associativité, la distributivité par rapport à l'addition ainsi que les cas où l'un des facteurs est égal à zéro ou à un. Nous avons examiné l'adaptation des différentes situations multiplicatives pour montrer ces différentes propriétés. Nous sommes parti des situations puisque à l'école primaire comme au collège, c'est en partant des problèmes que les opérations sont enseignées. Le bilan que nous pouvons en tirer est double. Premièrement, les différentes situations ne sont pas « équivalentes » pour enseigner les propriétés de la multiplication. Deuxièmement, certaines propriétés, comme la distributivité, émergent de nombreuses situations alors que d'autres, comme l'associativité ou la multiplication par zéro, ne sont pas faciles à établir. Enseigner le sens d'une opération, comme y incite conjointement la noosphère et les programmes officiels, comporte deux aspects : la résolution de problèmes que l'opération modélise et la compréhension des techniques opératoires qui reposent sur les propriétés de l'opération comme sur les systèmes d'écriture des nombres.

[77] La multiplication par un nombre positif conserve l'ordre donc a Ã1 et $n > 1 \Rightarrow a * n > a * 1$.

Après avoir étudié *a priori* l'enseignement des nombres décimaux (des différentes conceptions et des représentations symboliques qui y sont liées), des situations multiplicatives et des propriétés algébriques, nous allons donc aborder la relation entre la technique opératoire et les différentes écritures des nombres.

23. Les procédures de calcul du produit de deux décimaux

Nous avons considéré trois représentations des nombres décimaux : sous la forme d'un quotient, d'une somme ou d'un produit. Chacune d'elle est liée à des problèmes que les décimaux permettent de résoudre. Dans ce paragraphe, nous montrons, pour chacune de ces représentations, comment s'interprète et comment se calcule le produit de deux décimaux. Nous indiquons les propriétés de la multiplication qui sont utilisées pour permettre le calcul du produit ainsi que d'éventuelles inadaptations d'une représentation des nombres décimaux pour penser ou calculer leur produit. Nous accordons enfin une attention particulière à l'usage des calculatrices.

Avec les nombres décimaux écrits sous la forme d'un quotient d'entiers

Nous reprenons les trois types de problème que l'utilisation des rationnels aide à résoudre et que nous avons présentés précédemment : mesure, fractionnement et opérateur linéaire. Mesure et fractionnement seront traités ensemble car dans ces types de problèmes, le nombre rationnel $\frac{a}{b}$ est considéré comme la solution de l'équation $bx = a$. Que signifie $\frac{a}{b} * \frac{d}{c}$? comment peut-on calculer ce produit ? en utilisant quelles propriétés de la multiplication ?

◆ En considérant les rationnels comme des outils pour la mesure ou le fractionnement, le rationnel $\frac{a}{b}$ est la solution de l'équation $bx = a$, le rationnel $\frac{c}{d}$ est la solution de $dy = c$ et l'on obtient, après multiplication membre à membre des deux égalités, $(bx)(dy) = ac$. En utilisant l'associativité et la commutativité de la multiplication des entiers, on en déduit $(bd)(xy) = ac$ et finalement que $xy = \frac{ac}{bd}$ c'est-à-dire $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Cette technique opératoire permet d'obtenir facilement la technique usuelle de la multiplication des décimaux : on effectue la multiplication sans tenir compte des virgules puis on place la virgule au produit. Par exemple $3{,}14 * 2{,}7 = \frac{314}{100} * \frac{27}{10} = \frac{314 * 27}{100 * 10} = \frac{8\ 478}{1\ 000} = 8{,}478$.

◆ En considérant les rationnels comme des opérateurs multiplicatifs, par exemple comme des coefficients d'agrandissement des longueurs d'une figure plane, le produit de deux rationnels s'interprète comme le coefficient de la composée de deux agrandissements successifs. Remarquons que ce fait n'est pas immédiat et demande à être enseigné pour être construit. L'opérateur a/b transforme b en a, l'opérateur c/d transforme d en c. Pour calculer l'opérateur produit, il suffit de déterminer une valeur initiale et son image. Une propriété des applications linéaires est utilisée pour associer ad à bd puis ac à ad :

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \longrightarrow\boxed{*\ \frac{a}{b}}\rightarrow & & \longrightarrow\boxed{*\ \frac{c}{d}}\rightarrow & \\
b & \longrightarrow & a & & \\
 & & d & \longrightarrow & c \\
bd & \longrightarrow & ad & & \\
 & & ad & \longrightarrow & ac
\end{array}
$$

on en déduit $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. On retrouve ensuite la technique décrite ci-dessus.

Signalons, pour conclure sur les décimaux considérés comme des rationnels opérateurs, une difficulté que l'on rencontre si l'on souhaite construire le produit de deux rationnels par l'application d'un opérateur multiplicatif rationnel à une longueur elle-même rationnelle. C'est sans doute une des raisons qui ont conduit Guy Brousseau à enseigner la multiplication par composition d'agrandissements. Nous ne détaillerons pas les raisons de ces difficultés que Guy Brousseau lui-même expose dans des commentaires récents [78] de son article plus ancien « *Problèmes de didactique des décimaux* », nous en citons seulement de courts extraits qui indiquent la difficulté du passage de la multiplication d'une mesure rationnelle par un entier (ce que Guy Brousseau présente dans la « deuxième ligne ») à la multiplication d'une mesure rationnelle par un rationnel (ce que Guy Brousseau présente dans la « troisième ligne ») :

> La troisième ligne présente le cas où les opérateurs sont des fractions engagées dans des mesures rationnelles. (...) Cette étape présente l'aboutissement d'un processus très important et bien plus complexe que ne le laisse supposer la proximité formelle entre n × L/a et n/a × L (...) Il aurait fallu beaucoup d'étapes entre la deuxième ligne et la troisième pour représenter la lente évolution historique ou une évolution ontogénétique didactique plausible.

Avec les nombres décimaux écrits comme une somme

◆ En considérant les décimaux comme des mesures de longueur de segments ou d'aire de rectangles on obtient une possibilité de calculer le produit de deux rationnels. Le fait que l'aire du rectangle soit le produit de ses dimensions n'est pas immédiat et demande à être enseigné. Nous décrirons, dans le prochain chapitre, cette façon bien connue aujourd'hui de procéder qu'utilisent Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin dans leur ingénierie didactique. L'utilisation de l'addition des longueurs de segments mis « bout à bout » conduit à considérer le nombre décimal comme une somme de fractions dont les dénominateurs sont des puissances croissantes de 10.

[78] BROUSSEAU G. (1998), Problèmes de didactique des décimaux, *in Théorie des situations didactiques (201–*289), Grenoble : La pensée sauvage. [p. 213].

Version révisée et augmentée d'une première édition en 1981 in *Recherches en didactique des mathématiques 2/1 (37–127)*, Grenoble : La pensée sauvage.

Par exemple, la longueur 3,14 est pensée $3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100}$, la largeur 2,7 est pensée $2 + \frac{7}{10}$ et l'aire du rectangle 3,14 * 2,7 se calcule à l'aide d'un tableau en utilisant implicitement la distributivité à droite et à gauche de la multiplication :

	3	1/10	4/100	
	0 6	0 2	0 8	2
	2 1	0 7	2 8	7/10
8	4	7	8	

Remarquons que cette technique ne conduit pas à la technique usuelle du calcul du produit de deux décimaux mais à la technique dite « per gelosia ». Elle permet, par une lecture de chaque cellule, de rendre compte de chaque étape du calcul (à l'exception de la gestion des retenues) ainsi que, par une lecture des lignes, du calcul des produits partiels 2 * 3,14 et 0,7 * 3,14 comme lorsque la multiplication est disposée de façon habituelle [79] :

```
  u d c
        m

  3,1 4
* 2,7
  2 1 9 8
  6 2 8
  8,4 7 8
```

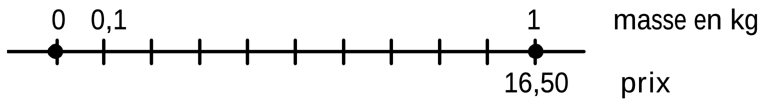
◆ Afin d'enseigner la multiplication des nombres décimaux considérés comme des abscisses de points de la droite numérique, une équipe de l'INRP a envisagé d'utiliser une bande à double graduation pour déterminer le produit de deux décimaux. Cette situation a été publiée dans *Apprentissages mathématiques en 6e* et reprise par les auteurs de *Travaux numériques 6e*, deux publications destinées aux professeurs de collège [80]. La procédure proposée qui repose sur une représentation graphique reste très artisanale et ne constitue pas une technique de calcul. Illustrons-la par une citation d'un extrait de *Travaux numériques 6e* :

> Etudions la correspondance entre la masse et le prix du pain pour 16,50 F par kg. Compléter les deux graduations figurant sur la feuille, puis à l'aide de ces données, déterminer le prix d'un bâtard de 200 g et le prix d'un pain de campagne de 500 g.

---

[79] Les lettres u, d, c, m désignent les colonnes des unités, des dixièmes, des centièmes et des millièmes.

[80] PRESSIAT A. (1991), *Apprentissages mathématiques en 6e,* Paris : Hatier/INRP.
DUPÉ C. & HILLION M. (1998), *Travaux numériques 6e*, Paris : Nathan Pédagogie.



Sous la graduation 0,1 l'élève doit écrire le dixième de 16,50 c'est–à–dire 1,65. Il écrira 2,30 (le double de 1,65) sous la graduation 0,2 et 8,25 (cinq fois 1,65) sous la graduation 0,5. L'élève pourra conclure que le prix du bâtard est 2,30 F et que celui du pain de campagne est 8,25 F. Ces deux valeurs correspondent respectivement aux produits 0,2 * 16,5 et 0,5 * 16,5.

Avec les nombres décimaux considérés comme des mesures

Dans l'approche où le nombre décimal sert à exprimer la mesure d'une grandeur, rappelons que l'écriture du nombre est liée aux unités de mesure usuelles. Un prix s'écrit avec deux chiffres après la virgule (francs, centimes), une masse avec trois chiffres (kilogramme, gramme)... Le nombre décimal est pensé comme une unification d'une écriture qui comporterait deux entiers : 3,450 kg pour 3 kg 450 g. C'est ce que nous avons convenu d'appeler le « format social » des décimaux–mesures. Voyons comment cette conception du nombre décimal intervient dans celle de la multiplication des décimaux.

◆ *La multiplication ne « respecte » pas le format social.* En limitant les nombres décimaux à des mesures, toutes les opérations sont liées à des grandeurs. Ces grandeurs sont exprimées par une écriture soumise au format social mais cette contrainte d'écriture n'est pas conservée de manière générale par la multiplication. Par exemple, en multipliant des kg (trois décimales) par des F/kg (deux décimales) on obtient des F (deux décimales) mais le produit obtenu peut contenir de zéro à cinq décimales. Ainsi, le « format social » n'est pas respecté par l'opération. Supposons par exemple qu'un élève ait à calculer le prix de 1,250 kg de viande à 36,00 F/kg ou à 36,40 F ou à 36,50 F/kg ou encore à 36,84 F/kg il trouvera respectivement comme montant à payer 45 F ou 45,5 F ou 45,625 F ou encore 46,05 F. Le premier et le dernier résultats sont conformes à l'écriture d'un prix en francs et centimes, le deuxième et le troisième résultats risquent d'être interprétés comme 45 F 5 c et 45 F 625 c par de nombreux élèves...

Dans un premier temps, l'attribution d'une unité à la partie entière et à la partie décimale peut faciliter l'enseignement des nombres décimaux qui sont alors conçus comme des couples d'entiers. Mais de nombreuses difficultés bien connues en sont les conséquences. Nous venons d'en montrer une qui vient du fait que des kg multipliés par des F/kg donnent des F alors qu'en multipliant un élément de Ì$_3$ par un élément de Ì$_2$, on n'obtient pas nécessairement un élément de Ì$_2$.

◆ *La technique opératoire ne peut s'établir de façon générale*. Nous le verrons en détail dans le prochain chapitre, certains anciens manuels présentent la technique opératoire de la multiplication des décimaux, en référence à celle des entiers, en procédant à des changements d'unités. En fait, cette méthode ne fonctionne pas de façon générale, nous allons le montrer en reprenant les exemples issus du cours d'arithmétique de Ch. Pugibet [81] :

> Vous voulez trouver le prix de 12 kg. de beurre à 43^{f},40 le kilogramme. (...)
>
> Vous voulez calculer le poids de 4^{ℓ},5 d'huile pesant 0^{kg},92 le litre.

Dans le premier exemple, on peut convertir le prix : le kilogramme de beurre coûte 4 340 centimes donc les 12 kg coûtent 52 080 c c'est-à-dire 520,80 F. La méthode s'exécute aisément. Ce n'est plus le cas quand il faut convertir à la fois le prix et le poids : quel serait, par exemple, le prix de 12,5 kg de beurre ? Le poids de beurre est de 125 hectogrammes et le prix de l'hectogramme est 434 c, ainsi le prix du beurre est 54 250 c c'est-à-dire 542,50 F. La méthode devient inutilisable lorsqu'on ne peut pas convertir simultanément le poids et le prix : quel serait, par exemple, le prix de 12,450 kg de beurre ? Impossible de calculer ainsi la valeur d'un décagramme donc celle de 12,450 kg, et pourtant, c'est un nombre à deux décimales : 540,33 F.

Dans le second exercice qui porte sur la multiplication de deux décimaux, la conversion n'est pas aussi facile. Le poids de 4,5 ℓ d'huile pesant 920 g le litre est égal au poids de 45 dℓ d'huile pesant 92 g le dℓ, on obtient 4 140 g c'est-à-dire 4,140 kg. Mais comment calculer le poids de 4,55 ℓ d'huile ? Avec cette méthode, c'est impossible. Et pourtant, on obtient 4,186 kg et le format social du résultat est bien respecté.

Cette méthode qui repose sur des conversions d'unités n'est donc pas suffisante comme technique pour multiplier deux décimaux. Elle impose au professeur de choisir correctement les valeurs numériques pour poser uniquement les exercices que les élèves peuvent résoudre. Finalement cette méthode ne demande qu'à être abandonnée le plus tôt possible au profit de la technique usuelle qu'elle ne permet pas d'expliquer et qui doit donc être seulement constatée puis admise.

La méthode de changement d'unités, utilisée dans les manuels d'avant la réforme de la mathématique moderne, a été abandonnée après cette réforme. Pour que les nombres décimaux enseignés correspondent davantage aux nombres décimaux utilisés en mathématiques, l'institution a modifié les programmes en affirmant l'indépendance entre le nombre décimal et la mesure. Durant cette période, les manuels ont privilégié un travail sur des écritures numériques, plus abstrait. Aujourd'hui, la méthode généralement proposée consiste à appliquer des opérateurs multiplicatifs aux facteurs du produit pour obtenir le produit de deux entiers et placer la virgule en divisant. Par exemple, pour calculer 3,14 * 2,7 on calcule 314 * 27, on obtient 8 478 puis on utilise implicitement la démarche suivante qui repose sur la commutativité et l'associativité de la multiplication :
8 478 = 314 * 27 = (3,14 * 100) * (2,7 * 10) = (3,14 * 2,7) * 1 000

[81] PUGIBET CH. (1947), Arithmétique, cours supérieur, classe de fin d'études, certificat d'étude primaire, Paris : Armand Colin. [p. 94].

d'où 3,14 * 2,7 = 8 478 ÷ 1 000 = 8,478.
Cette méthode est générale, elle permet d'expliquer la « règle de la virgule », elle pourra donc céder sa place à la technique usuelle.

Pour terminer notre étude des méthodes de calcul du produit de deux décimaux, nous allons analyser maintenant l'intégration des calculatrices dans l'enseignement. Leur usage, aujourd'hui incontournable, est recommandé par les programmes, il permet d'obtenir le produit de deux décimaux ; nous verrons s'il renforce ou s'il gêne l'enseignement de la technique opératoire, non pas en le plaçant en concurrence avec elle mais en examinant s'il donne ou non de nouvelles occasions pour apprendre plus ou simplement pour apprendre mieux.

Avec la calculatrice

En ce qui concerne spécifiquement la multiplication des décimaux, la mise en œuvre de la technique de multiplication des entiers mise à part, le calcul à la main et le calcul à la calculatrice se distinguent principalement dans l'écriture de la virgule et dans la simplification de l'écriture du résultat. Par exemple, le calcul à la main du produit 3,8 * 2,15 conduit à 8,170 alors que le calcul à la machine conduit directement à 8,17. Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, certains auteurs de manuels proposent des exercices pour engendrer une réflexion des élèves sur le nombre de décimales des facteurs et du produit, quelques-uns reposent sur l'utilisation de la calculatrice.

En considérant le décimal comme un rationnel particulier, le sens de la simplification peut être approfondi : ce n'est pas simplement qu'on « barre le zéro inutile » c'est qu'on simplifie l'écriture du nombre, on transforme la façon de penser ce nombre, on pense $\frac{817}{100}$ au lieu de penser $\frac{8\,170}{1\,000}$.

Comment l'utilisation de la calculatrice s'intègre-t-elle à un enseignement de la multiplication des décimaux pensés comme des mesures et dont l'écriture est contrainte à un format social ? Comme nous venons de le montrer, la multiplication ne « respecte » pas le format social. Par ailleurs le calcul à la main et le calcul à la machine ne conduisent pas toujours à la même tâche pour l'élève. Illustrons notre propos par quelques exemples :

1,500 kg de fraises à 15,80 F/kg coûtent 23,70 F,
1,800 kg de pêches à 15,75 F/kg coûtent 28,35 F,
0,640 kg de potiron à 7,80 F/kg coûtent 5,00 F.

Dans le premier exemple la calculatrice affiche un prix de 23,7 qui peut être interprété comme 23 F 7 c alors que le produit obtenu en posant l'opération (voir ci-après), en supprimant les zéros inutiles et en effectuant tous les décalages des produits partiels comporte exactement deux décimales.

Dans le deuxième exemple, la calculatrice fournit le résultat avec deux décimales alors qu'en posant le calcul et en supprimant les zéros inutiles (voir ci-après), l'élève obtient trois décimales au produit donc c'est lui qui, en recopiant le résultat, décide ou non de restituer le format social du prix.

$$\begin{array}{r} 1\,5{,}8\,\cancel{0} \\ * \quad 1{,}5\,\cancel{0}\,\cancel{0} \\ \hline 7\,9\,0 \\ 1\,5\,8\,. \\ \hline 2\,3{,}7\,0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,5{,}7\,5 \\ * \quad 1{,}8\,\cancel{0}\,\cancel{0} \\ \hline 1\,2\,6\,0\,0 \\ 1\,5\,7\,5\,. \\ \hline 2\,8{,}3\,5\,0 \end{array}$$

Dans le troisième exemple, les deux façons de calculer donnent le même produit : 4,992 F qui est arrondi à 5 F dans la vie quotidienne et que l'on peut écrire 5 F ou 5,00 F.

Finalement, l'utilisation de la calculatrice pour multiplier deux décimaux demande une connaissance plus approfondie des décimaux et impose une réflexion pour restituer le résultat en respectant le format social. Certains auteurs comme Jeanne Bolon [82] ou Milena Basso & Cinzia Bonotto [83] proposent d'utiliser ces contraintes comme des leviers. Elles soumettent aux élèves des problèmes à partir desquels ils construiront des connaissances plus solides parce qu'ils auront levé les contradictions que nous avons signalées. Dans la conclusion de sa thèse, Jeanne Bolon signale que de telles perspectives pédagogiques n'ont pas été suffisamment explorées par la recherche en didactique des mathématiques [84] :

> Un autre domaine de recherche (à ouvrir) concerne les rapports entre *les savoirs pratiques et les « savoirs du cours de mathématiques »*, entre le point de vue « technologique » et le point de vue mathématique. (...) Il nous paraît important d'exhiber, en particulier dans l'enseignement secondaire, les zones de validité de ces deux types d'approches, les différences de statut entre les objets de l'action et les objets mathématiques.

Nous pouvons maintenant conclure cette étude de la multiplication par un examen *a priori* de l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux.

A priori, quel enseignement de la multiplication des décimaux ?

Avant d'étudier les propositions pour enseigner la multiplication des nombres décimaux qui figurent dans différentes publications et d'aborder les contraintes éventuelles qui peuvent influencer un professeur dans ses choix d'enseignement, nous souhaitons conclure l'étude que nous venons de mener sur l'enseignement de la multiplication à partir des situations qu'elle modélise. Si nous insistons sur ces

---

[82] BOLON J. (1996), *Op. cit.* [pp. 221–222 et 239].

Les suggestions 2 et 9 proposent des activités sur les grandeurs familières et les unités conventionnelles.

[83] BASSO M. & BONOTTO C (1996), Un'esperienza didattica di integrazione tra realtà extrascolastica e realtà scolastica riguardo ai numeri decimali, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate vol. 19A N. 5 (424–449)*, Paderno del Grappa TV. : Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin.

Les auteurs décrivent une expérience d'enseignement de la multiplication des décimaux et de la proportionnalité en introduisant des tickets de caisse de supermarchés, de primeurs, de bouchers... dans le contexte scolaire.

[84] BOLON J. (1996), *Op. cit.* [pp. 329–330].

situations, c'est parce qu'elles contribuent au sens de l'opération qui doit être acquis en classe de sixième [85] :

> En sixième, il s'agit donc désormais de faire acquérir par les élèves le produit de deux nombres décimaux (...) Ce dernier apprentissage est difficile dans la mesure où il existe une rupture de sens avec les cas du produit de deux naturels et d'un décimal par un naturel, cas pour lesquels la référence à l'addition réitérée est possible pour accéder à la multiplication.

Les propriétés de l'opération et les techniques de calcul constituent les deux autres composantes du sens de la multiplication. Nous avons vu, en procédant à des croisements, que suivant les situations multiplicatives ou les représentations symboliques des décimaux, il n'était pas toujours possible de montrer telle propriété algébrique ou de justifier la technique opératoire usuelle.

Il ne peut donc être question dans un enseignement de retenir une seule situation de référence de la multiplication ou d'adopter une seule écriture des décimaux. Cependant, pour introduire la notion, le professeur doit bien choisir. Pour conclure l'analyse *a priori* de l'enseignement de la multiplication à l'école et au collège nous voudrions montrer les conséquences de tels choix. Nous allons rappeler et croiser les résultats obtenus concernant les représentations des nombres décimaux et les trois composantes du sens de la multiplication. Cela nous donnera, en terme de possibles, des outils pour analyser les propositions d'enseignement de la multiplication des décimaux qui figurent dans les publications.

Représentations des décimaux et situations multiplicatives

En considérant trois types de représentations des décimaux et les problèmes qui sont liés, nous avons repéré six manières de penser les nombres décimaux : « rationnel−mesure », « rationnel−fractionnement », « rationnel−opérateur », « décimal−mesure », « décimal−abscisse » et « décimal−système métrique ». En plus de l'addition réitérée, nous avons distingué cinq types de situations multiplicatives dont un, le produit cartésien de deux ensemble fini, qui ne concerne que les nombres entiers. A ces cinq types de situations s'ajoute la bande à double graduation qui constitue un outil graphique pour multiplier. Nous allons dresser un tableau qui rappelle, suivant les situations multiplicatives quelles sont les représentations des décimaux qui peuvent être mobilisées.

[85] Mathématiques : articulation école−collège, BO n°44 du 5 décembre 1996.

	Rationnel mesure	Rationnel fractionnement	Rationnel opérateur	Décimal mesure	Décimal abscisse	Décimal s. métrique
Opérateur scalaire * mesure	×	×	×	×		×
Composition d'opérateurs			×			
Produit de mesures	×	×		×		×
Isomorph. de mesures	×	×	×	×		×
Double graduation					×	

Tableau 1. Représentation des décimaux et situations multiplicatives

Le tableau permet de visualiser les représentations des décimaux que l'on peut mobiliser suivant chaque situation multiplicative. Les problèmes issus de la vie quotidienne qui sont beaucoup proposés aux élèves (comme le montrent les choix d'exercices des auteurs de manuels scolaires) reposent fréquemment sur une situation d'isomorphisme de grandeurs ; ils semblent donc se prêter facilement à un travail fructueux concernant les représentations des nombres décimaux.

Représentations des décimaux et méthodes de calcul d'un produit

Nous avons montré que les choix d'écriture des nombres conduisent à des méthodes de calculs variées mais qui ne permettent pas toutes aussi facilement de justifier la technique opératoire usuelle. Rappelons ces résultats dans un tableau. Nous distinguerons les conceptions des décimaux et les écritures suivantes : les rationnels (mesures, fractionnements ou opérateurs) écrits sous forme de fractions décimales ($a/10^n$), les « décimaux–mesures » explicitement écrits comme une somme d'un entier et de fractions décimales de numérateurs inférieurs à 10 ($n+\sum a_i/10^i$), les « décimaux–abscisses » quelle que soit leur écriture (somme ou notation décimale) et les « décimaux–système métrique » associés à une unité du système métrique écrits avec la notation décimale (*a,bcd unité*). Pour les méthodes de calcul d'un produit, nous avons montré qu'il fallait distinguer la technique usuelle, les méthodes générales de calcul (par exemple la méthode *per gelosia*) et les méthodes artisanales qui ne permettent pas de déterminer tous les produits.

		Méthode non générale	Méthode générale	Technique usuelle
Rationnels quelconques	$a/10^n$	×	×	×
Décimaux–mesures	$n+\sum a_i/10^i$	×	× (per gelosia)	
Décimaux–abscisses	quelconque	× (graphique)		
Décimaux–s. métrique	*a,bcd* unité	× (conversion)		

Tableau 2. Représentation des nombres décimaux et méthodes de calcul d'un produit

Propriétés algébriques et situations multiplicatives

Nous allons rappeler les résultats obtenus concernant l'adaptation des diverses situations multiplicatives pour montrer les propriétés algébriques de l'opération.

Dans le tableau suivant, pour chaque situation multiplicative, nous avons codé par le signe « + » les cas où les illustrations de propriétés et les prolongements aux valeurs 1, 0 sont aisées avec la référence à la situation. Nous avons codé par le signe « - » les cas où ces illustrations sont très difficiles ou impossibles avec cette situation. Enfin, nous avons codé par le signe ≈ les cas où les illustrations et les prolongements ne sont pas impossibles mais sont assez artificiels avec cette situation. Nous disposons alors d'un tableau des différentes situations et de leur efficacité à montrer les propriétés algébriques. Nous avons grisé les colonnes correspondant à deux situations (produit cartésien et points en réseau rectangulaire) qui conviennent pour montrer les propriétés opératoires de la multiplication de deux entiers mais qui ne peuvent se prolonger au cas de facteurs décimaux.

	Addition réitérée	**Opérateur [* *k*]→**	**Compo. d' opérateurs**	**Produit cartésien**	**Points en réseau**	**Aire de rectangles**	**Isomorph. de mesures**
Commutativité	≈	-	-	≈	+	+	≈
Associativité	≈	-	+	≈	-	-	≈
Distr. à droite	≈	+	-	+	+	+	+
Distr. à gauche	+	-	-	+	+	+	+
1 * *n*	+	+	-	+	≈	+	≈
n * 1	-	-	-	+	≈	+	≈
0 * *n*	+	-	-	-	-	-	-
n * 0	-	-	-	-	-	-	-

Tableau 3. Situations multiplicatives et propriétés de la multiplication

Ce tableau rappelle qu'à chaque propriété correspondent des situations adaptées et des situations inadaptées. Une exception cependant, la multiplication par zéro pour laquelle aucune des situations ne fournit d'illustration ou de support pour l'établir avec les deux positions possibles du facteur nul. Seule l'addition réitérée permet de justifier que $0 * n = 0$. La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition se montre par de nombreuses situations mais il n'en va pas de même pour la commutativité, l'associativité et pour les produits qui contiennent un facteur nul. Un professeur qui voudrait montrer ces propriétés devra, dans sa préparation, être attentif aux situations qu'il choisira comme support des tâches qu'il proposera aux élèves.

Nous constatons en outre qu'aucune des situations multiplicatives n'est adaptée pour montrer l'ensemble des propriétés. Le nombre important de signes « - » et « ≈ » du tableau montre que les propriétés de la multiplication des nombres décimaux (entiers ou non) ne sont pas faciles à enseigner à partir des situations multiplicatives. Les trois situations les plus polyvalentes pour l'enseignement de la multiplication des décimaux sont, dans l'ordre, les situations de produit de mesures (calcul d'aire de rectangles), l'addition réitérée et l'isomorphisme de grandeurs. Ces situations sont-elles celles qui sont le plus utilisées dans les manuels scolaires ou en classe pour enseigner la multiplication des nombres décimaux ? Le chapitre suivant, consacré aux propositions d'enseignement, permettra de répondre à cette question.

Compléments sur l'addition réitérée. Le bon « score » de l'addition réitérée peut surprendre le lecteur familier des documents d'aide pédagogique où, comme nous l'avons vu, cette conception de la multiplication est rejetée par de nombreux arguments d'inefficacité pour l'enseignement de certaines propriétés de la multiplication. Mais l'étude globale que nous avons menée montre qu'une comparaison locale ne permet pas d'apporter de conclusions générales. Nous avons trouvé une seule brochure pour montrer des qualités pédagogiques de l'addition réitérée [86]. Citons ces auteurs de l'INRP qui commentent la réussite des élèves à deux réductions de calcul littéral ($a + a + a$ et $2a + 3a$) :

> La faiblesse des résultats en 4ème notamment (...) appelle des remarques suivantes en matière d'analyse en terme de « savoir » et de « travail des élèves ».
>
> **En terme de savoir**. L'addition itérée n'est pas un objet d'enseignement au collège, alors que la multiplication itérée en est un.
>
> Pourtant, (...)
>
> Ceci prouve que l'on peut définir la multiplication dans Ë à partir de l'addition et de la relation d'ordre. L'addition itérée apparaît comme ayant un grand intérêt dans le savoir savant. Elle est d'ailleurs exploitée à l'école primaire pour l'enseignement de la multiplication. Pourquoi n'est-elle pas enseignée au Collège (ce qui conduit à renforcer la conception de la lettre « objet » par des explications du type 2 ananas + 3 ananas = 5 ananas donc $2a + 3a = 5a$) ? (...)
>
> **En terme de travail de l'élève**. On attend donc de l'élève que, face à $2a + 3a$, il tienne le raisonnement matérialisé par les étapes suivantes :
>
> $2 * a + 3 * a$
> $(2 + 3) * a$
> $5 * a$
> $5a$
>
> alors que dans un groupe additif, on a directement $2a+3a = 5a$ puisque $2a + 3a = a + a + a + a + a = 5a$.

Les auteurs semblent regretter que l'addition itérée ne soit pas davantage enseignée au collège et ils attribuent à cette carence de l'enseignement certaines difficultés rencontrées par les élèves. Pour notre part, nous pensons que l'absence de l'addition répétée dans les programmes de collège ne signifie pas une absence de référence à cette conception de la multiplication de la part des professeurs mais peut-être ne la développent - ils pas autant qu'ils pourraient le faire si elle apparaissait explicitement dans les instructions officielles.

[86] COLOMB J. (sous la direction de) (1995), *Calcul littéral - Savoirs des élèves de collège,* Paris : INRP, Documents et travaux de recherche en éducation, Didactique des disciplines. [p. 23].

Compléments sur le calcul d'aire de rectangles. Malgré le « très bon score » de la situation de calcul d'aire de rectangles, nous avons remarqué (nous le montrerons dans le prochain chapitre) qu'elle est moins utilisée, par les auteurs de manuels, que l'addition réitérée ou que l'isomorphisme de grandeurs. Cela apparaît comme une contradiction. Différents travaux ont montré que les professeurs associent souvent le calcul d'aire à l'utilisation de formules. Les programmes portent - ils leur part de responsabilité ? Voyons ce qu'on y lit sur l'aire du rectangle [87] :

> (×) Détermination du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'un rectangle, de l'aire d'un triangle, du volume du pavé. Utilisation d'un formulaire pour calculer l'aire ou le volume d'un objet donné.
>
> (××) Seule la surface du rectangle est au programme, en liaison avec la multiplication. (...) A propos du rectangle le maître insiste sur les opérations associées au calcul du périmètre et de la surface (addition pour le périmètre ; multiplication pour la surface). L'utilisation de formules littérales est prématurée à l'école, aussi une forme intermédiaire est utilisée :
> périmètre du rectangle = 2 longueurs + 2 largeurs ;
> surface = longueur * largeur.
>
> (×××) On pourra faire déterminer des aires à l'aide, soit de reports, de décomposition, de découpages et de recollements, soit de quadrillages et d'encadrements. (...) On pourra s'appuyer sur ces travaux qui donnent du sens à la notion d'aire pour constituer et utiliser un formulaire.

Ces citations montrent que la préoccupation majeure des auteurs des programmes est d'articuler l'acquisition de la notion d'aire, l'élaboration d'un formulaire, l'application de formules. A cela s'ajoute le fait que, dans les programmes, le calcul de l'aire du rectangle apparaît dans les activités géométriques alors que la multiplication figure dans les activités de calculs numériques. Ce cloisonnement apparent des activités mathématiques dans les instructions explique sans doute pour une part le cloisonnement trouvé dans les manuels (qui souvent respectent la progression des textes officiels) où le calcul d'aire est une activité plutôt traitée en « géométrie » et donc en appliquant les acquis sur la multiplication qui n'est alors plus questionnée.

Conclusions sur les nombres décimaux et leur multiplication

Dans ce chapitre, nous avons mené une étude préliminaire de l'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. L'objectif était de nous donner des moyens d'analyser les enseignements proposés dans des publications pour les rapports qu'ils ménagent entre le sens des notions étudiées et les tâches proposées

[87] (×) Programme du 23 avril 1985 pour l'enseignement des mathématiques au cycle 3.
(××) Projets de documents d'application des programmes de l'école élémentaire, 26/08/1999.
(×××) Programme de mathématiques de la classe de sixième, 22 novembre 1995.

aux élèves. Nous avons abordé successivement l'enseignement des nombres décimaux puis celui de la multiplication, à l'école primaire puis au collège.

Au XVIe siècle, les nombres décimaux, avec les écritures décimales illimitées, ont permis d'effectuer un premier pas vers l'unification du domaine numérique. Entiers, rationnels et irrationnels peuvent s'écrire selon le même principe, les calculs et les comparaisons sont facilités. Dans l'enseignement, les décimaux peuvent être abordés de différentes façons suivant leur écriture et les problèmes qui sont liés. Certaines permettent de montrer en partie le rôle que ces nombres ont eu dans l'histoire des mathématiques. Des problèmes de mesure ou d'agrandissement de figures planes conduisent à la construction de l'ensemble des rationnels dont font partie les décimaux. Certains enseignements posent d'emblée la droite numérique unifiée, les nombres sont déterminés ou sont approchés en procédant à des subdivisions successives de l'unité. L'introduction du système métrique permet l'écriture de mesures de grandeurs usuelles en utilisant les nombres décimaux.

Après une évolution sensible des instructions depuis une cinquantaine d'années, les programmes recommandent actuellement de traiter le caractère algébrique des nombres décimaux en les introduisant à partir des fractions décimales qui permettent de résoudre des équations qui restent sans solution dans l'ensemble des entiers. Ils recommandent de privilégier l'utilisation des nombres décimaux pour les problèmes de mesure, d'approximation et de comparaison. Ils préconisent enfin de faire acquérir les techniques opératoires, sans rechercher la virtuosité, afin que les élèves puissent résoudre des problèmes numériques. La résolution de problèmes est conçue, dans le texte même des programmes, comme étant à la fois « *la source et le critère des connaissances* ».

Après avoir été réduit à un nombre - concret assimilable à un nombre entier par un changement d'unité, après avoir été opposé aux nombres–abstraits et aux opérateurs, le nombre décimal a acquis le statut de « *nouveau nombre* ». Parallèlement, nous avons aussi constaté, comme Jeanne Bolon, que l'enseignement relatif aux grandeurs usuelles a perdu de son importance et que les situations qui les mettent en relation se raréfient. Cette évolution de l'enseignement des nombres n'est pas sans conséquence sur l'enseignement des opérations, en particulier celui de la multiplication : les manuels ne proposent que très peu de problèmes issus de situations multiplicatives au profit d'exercices plus techniques ou formels.

Pour déterminer les enjeux mathématiques de l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux, nous avons abordé les situations multiplicatives, les propriétés algébriques et les méthodes de calcul du produit de deux décimaux.

La multiplication, jusqu'aux années soixante–dix, a été assimilée à une addition réitérée ou à une « convention sociale ». Des études [88] ont montré le caractère réducteur d'une telle conception, notamment sur la question de la

[88] Nous pensons aux travaux de Janine Rogalski et de Gérard Vergnaud sur la multiplication.

dimension. Les instructions officielles issues de la réforme dite de « la mathématique moderne » ont préconisé l'introduction de la multiplication par des activités de dénombrement qui font implicitement référence au produit cartésien de deux ensembles. Mais si la présentation a évolué, les problèmes proposés aux élèves sont restés les mêmes : ceux qui se prêtent à un traitement linéaire, ou ceux qui mobilisent seulement l'application de formules. Des propositions très riches et très variées, issues notamment de recherches en didactique des mathématiques [89], permettraient d'envisager actuellement un enseignement de la multiplication qui prenne en compte à la fois les trois grands types de situations multiplicatives que distingue Gérard Vergnaud [90] : un seul espace de mesure, le produit de mesures et l'isomorphisme de mesure. Mais les programmes actuels pour l'école primaire focalisent davantage l'enseignement sur les nombres et sur leurs écritures que sur les opérations. Dans les manuels, si l'addition réitérée n'est plus le modèle des situations de référence pour la multiplication, on n'y trouve souvent seulement que des exemples techniques où les transformations d'écritures sont accompagnées d'arguments théoriques et très peu de situations multiplicatives. Nous pourrions aller jusqu'à dire que l'opération a cédé la place aux « écritures multiplicatives ».

Puis nous avons abordé les propriétés algébriques de la multiplication. Leur apprentissage est indispensable pour posséder la technique opératoire usuelle qui repose sur l'écriture des nombres mais aussi sur les propriétés de l'opération. Comment les établir en s'appuyant sur les différentes situations multiplicatives étudiées ? Nous avons constaté que c'est parfois impossible pour certaines propriétés du fait même que l'opération porte sur des mesures. Nous avons conclu cette étude en remarquant que, mise à part la situation de calcul d'aire de rectangle, les situations où la multiplication se conçoit comme une addition réitérée sont, contre toute attente, les plus adaptées à montrer les propriétés algébriques de cette opération.

Enfin nous avons analysé les possibilités qu'offraient les différentes conceptions des décimaux, suivant leurs écritures, pour élaborer des méthodes de calcul d'un produit de deux nombres. Nous avons montré des différences importantes. La fraction décimale associée à une conception rationnelle est une écriture qui permet d'établir facilement la technique usuelle. Avec la décomposition en la somme d'un entier et de fractions décimales de numérateurs inférieurs à 10 ($n+\sum a_i/10^i$), la technique de calcul la plus adaptée est celle dite « per gelosia ». Ces deux méthodes sont bien des techniques opératoires car elles permettent d'effectuer tous les calculs. Ce n'est pas le cas de deux autres méthodes, plus artisanales, qui permettent de traiter seulement quelques exemples : les conversions qu'on utilise avec des décimaux - mesures, et les bandes à double graduation qui reposent sur une conception où les nombres sont des abscisses de points de la droite numérique.

---

89 Nous pensons ici encore aux travaux de Janine Rogalski et de Gérard Vergnaud mais aussi à ceux de Nadine & Guy Brousseau et de Régine Douady & Marie–Jeanne Perrin sur les nombres décimaux et les aires de surfaces planes.

90 VERGNAUD G. (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité,* Berne : Peter Lang. [pp. 161 et suiv.].

Il apparaît finalement qu'un enseignement de la multiplication des nombres décimaux qui comprendrait à la fois l'étude de situations multiplicatives variées et l'élaboration de la technique opératoire usuelle nécessite une bonne connaissance des nombres décimaux et de leurs écritures ainsi qu'un long travail contextualisé. Un tel enseignement doit-il s'effectuer seulement en sixième ? Un professeur pourrait, au vu des programmes, interpréter la répartition entre l'école primaire et le collège de la façon suivante :

- à l'école, multiplication de deux entiers et multiplication d'un décimal par un entier c'est-à-dire les deux cas où la multiplication s'interprète aisément comme une addition réitérée ;
- au collège, multiplication de deux décimaux donc enseignement des situations multiplicatives qui ne relèvent pas de l'addition.

Une telle interprétation ne serait pas forcément défavorable à l'enseignement de la multiplication et des décimaux. Elle n'entrerait pas non plus en contradiction avec l'ambition de l'institution scolaire.

Après en avoir montré les enjeux, nous allons analyser les enseignements proposés de la multiplication des nombres décimaux dans les différentes publications auxquelles les professeurs peuvent avoir accès et qu'ils sont susceptibles d'utiliser pour préparer leurs cours : les manuels, les brochures et les ouvrages à l'intention des enseignants, ainsi que les travaux de recherche en didactique des mathématiques. L'objectif de ce prochain chapitre est d'étudier, compte tenu des résultats que nous venons d'obtenir, les conséquences envisageables de ces enseignements sur l'apprentissage des élèves.

CHAPITRE 2

LA MULTIPLICATION DES DÉCIMAUX EN SIXIÈME, QUELLE TRANSPOSITION DIDACTIQUE ?

Sommaire

Le chapitre précédent a permis de montrer quels peuvent être les objectifs d'apprentissages mathématiques visés par un enseignement de la multiplication des nombres décimaux en classe de sixième. Ils concernent à la fois les situations multiplicatives et leur variété, les propriétés algébriques de l'opération et les techniques de calcul du produit de deux décimaux. Le réinvestissement des acquis nouveaux doit permettre de résoudre des problèmes numériques contextualisés ou non, donc d'identifier une éventuelle structure multiplicative et de déterminer un produit par un calcul.

Dans ce chapitre, nous analysons, selon des critères liés à l'apprentissage, les différents matériaux publiés qui sont susceptibles de nourrir des formations sur ce thème ou, plus généralement, les projets élaborés par les professeurs pour leur enseignement de la multiplication des décimaux dans leurs classes.

Nous avons choisi d'écarter les publications antérieures aux années quatre-vingts compte tenu du changement des ambitions institutionnelles marqué par les programmes du 7 juillet 1978, changements dont nous avons montré l'importance au chapitre précédent. En outre, comme nous l'avons déjà signalé, jusqu'aux programmes du 22 février 1995 appliqués en CM2 depuis septembre 1997, la multiplication de deux décimaux figurait au programme de l'enseignement de l'école primaire mais pas en sixième. Depuis cette date, elle est enseignée au collège mais elle ne l'est plus dans le premier degré. Cette modification nous a conduit à examiner aussi des manuels destinés aux élèves de CM2 publiés avant le changement de programme. Notons toutefois que ces manuels ne sont pas construits comme ceux qui sont destinés aux élèves de collège, les chapitres y sont beaucoup plus nombreux et beaucoup plus courts, les exercices d'entraînement y sont nettement moins nombreux. Aussi, pour les comparaisons, distinguerons-nous les manuels suivant le cycle de l'enseignement concerné.

Nous analysons donc les enseignements proposés dans diverses publications : recherches, articles ou brochures, ouvrages pédagogiques, manuels... Nous les comparons en fonction de deux critères imbriqués : celui des savoirs mathématiques travaillés par les élèves (selon les prévisions de ces enseignements) et celui des choix didactiques opérés pour élaborer les scénarios. Pour le premier critère, nous utilisons l'étude des enjeux mathématiques de l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux du chapitre précédent, pour le second, nous nous référons aux outils d'analyse élaborés en didactique des mathématiques.

Dans les différents projets d'enseignement disponibles, nous dégageons le contenu mathématique abordé. Ainsi, nous allons repérer les situations multiplicatives desquelles sont issus les problèmes, les propriétés algébriques et leur utilisation dans des exercices de calcul mental ou raisonné, l'élaboration de la technique opératoire et son utilisation dans les calculs écrits puis, d'autre part, les exercices de calcul d'un produit (écrit, mental, approché), et les questions plus théoriques.

Pour analyser les enseignements proposés dans ces publications, nous utilisons des critères développés en didactique des mathématiques et qui, selon les hypothèses généralement admises dans ce champ de recherche, ont une incidence sur l'apprentissage, au moins en tant que processus. Il s'agit de repérer la dynamique savoir ancien/savoir nouveau (notamment dans le passage de la multiplication des entiers à celle des décimaux) ainsi que les dialectiques contextualisation/décontextualisation des savoirs en jeu (l'opération, ses propriétés et la technique opératoire). Il s'agit aussi de décrire la nature des tâches prévues pour les élèves notamment de distinguer celles qui ne demandent que des applications directes de techniques opératoires (mentales ou écrites) de celles où l'élève doit, soit reconnaître la structure multiplicative de la situation, soit mettre en fonctionnement des propriétés de la multiplication (calcul raisonné). Nous n'étudierons pas l'exposition des savoirs car les publications analysées sont très hétérogènes de ce point de vue du fait de l'objectif des auteurs : dans certaines publications destinées aux enseignants, le savoir n'est pas exposé car le lecteur est supposé le maîtriser.

Autrement dit, il s'agit dans ce chapitre d'étudier la transposition didactique de l'objet de savoir multiplication des nombres décimaux dans les différentes « institutions » que sont les publications qui comportent des propositions d'enseignement pour des élèves de la fin du cycle primaire ou de la classe de sixième : recherches, ouvrages et brochures pédagogiques, manuels scolaires.

Une analyse préalable montre que des choix didactiques globaux partagent les propositions d'enseignement de la multiplication des décimaux en trois catégories :

- les décimaux sont des nombres pour lesquels une opération appelée multiplication est construite par une méthode de calcul du produit, cette méthode est montrée à l'élève, puis elle est utilisée pour calculer les produits obtenus lors de la résolution de problèmes issus de différents contextes. Nous intitulerons « de la technique opératoire aux problèmes » les projets inspirés de cette démarche ;
- la multiplication des décimaux est éventuellement rendue nécessaire par l'étude de situations multiplicatives puis, indépendamment de ces situations étudiées, une méthode de calcul du produit est laissée, au moins partiellement, à la charge de l'élève qui doit la découvrir, la formuler et éventuellement la justifier. Enfin, la multiplication est utilisée pour résoudre des problèmes. Nous intitulerons « des activités, une technique, des problèmes » les projets élaborés suivant ce choix ;
- la multiplication des décimaux est rendue nécessaire par l'étude de situations multiplicatives, l'étude de la situation permet de déterminer le produit de deux décimaux par une procédure de calcul construite en référence à la situation d'introduction, après décontextualisation et institutionnalisation, la multiplication est enfin réinvestie dans de nouvelles situations pour résoudre des problèmes. Nous intitulerons « construction des savoirs, institutionnalisation et réinvestissements » les projets qui suivent cette démarche.

Ces trois catégories organisent le présent chapitre. Après l'analyse des propositions d'enseignements publiées, nous reviendrons sur cette classification pour juger de sa pertinence.

1. De la technique opératoire aux problèmes multiplicatifs

Parmi les publications parues depuis le changement de programme du 7 juillet 1978 pour l'enseignement élémentaire, qui marque l'abandon de la réforme des « mathématiques modernes », nous n'avons trouvé des projets de cette catégorie que dans certains manuels pour l'école primaire ou pour le collège ; il n'y en a dans aucune brochure pédagogique ni dans aucun ouvrage destiné aux enseignants. En effet, ces ouvrages sont rédigés par des auteurs qui, comme le préconisent les programmes actuels, envisagent et mettent en œuvre l'acquisition de connaissances nouvelles par la résolution de problèmes [91].

> (×) D'une façon générale, on continuera à privilégier les démarches pédagogiques qui placent les élèves dans des situations où les notions et techniques à introduire ou à réinvestir leur apparaissent comme réponses à des problèmes, sans jamais perdre de vue qu'au cycle moyen, comme plus tard, toute nouvelle notion ou technique se construit sur des acquisitions antérieures (éventuellement remises en question) et sur des expériences dont disposent les élèves.
>
> (××) La résolution de problèmes occupe une place centrale dans les apprentissages mathématiques, à l'école primaire comme au collège, notamment en vue de l'appropriation de connaissances nouvelles par les élèves.

Dans ce paragraphe, nous n'aborderons donc pas d'autres publications que des manuels scolaires pour l'enseignement primaire ou secondaire.

Rappelons que nous avons choisi de ne pas tenir compte, dans notre étude, de publications antérieures à 1980 c'est-à-dire à l'application des programmes de 1978. Certains enseignants qui débutaient ou qui exerçaient au cours de cette période ont pu être définitivement convaincus par les arguments alors développés. Il nous suffit de nous remémorer certains stages de formation continue que nous avons animés sur le thème de la liaison école-collège pour en trouver des exemples. Citons, pour mémoire, les conseils pédagogiques qu'on pouvait lire en 1973 dans une brochure intitulée « *Etudes pédagogiques* » [92] où la multiplication de deux décimaux est définie par la technique opératoire, où ses propriétés sont démontrées à partir de celles de la multiplication et de l'addition des entiers naturels et où n'apparaît aucune situation multiplicative :

> La circulaire du 22 novembre 1971 indique deux voies parmi celles possibles pour l'étude des décimaux : ou bien supposer connues au départ les conventions d'écriture des décimaux ainsi que les règles opératoires de l'addition et de la multiplication dans Ì, ou bien de faire une véritable construction de Ì après une étude des puissances de dix d'exposant entier.

---

[91] (×) Instructions pédagogiques pour le cycle moyen, arrêté du 7 juillet 1978.
(××) Mathématiques : articulation école-collège, BO n°44 du 5 décembre 1996.

[92] VIBES J. (1973), *Information des maîtres, Décimaux et approche des réels.* Reims : INRP – CRDP.

> (...) Soient deux décimaux α et β écrits respectivement avec n et p décimales et soient a et b les entiers obtenus après suppression des virgules s'il y en a (c'est-à-dire si n ou p sont non nuls). Le produit $\alpha * \beta$ des 2 décimaux sera, par définition, le décimal obtenu à partir du produit a * b en séparant dans le dernier (n + p) décimales.

Nous verrons qu'il ne reste, aujourd'hui, plus aucune trace de cette conception de l'enseignement de la multiplication des décimaux dans les différents manuels, qu'ils soient antérieurs ou postérieurs au changement de programme de 1995.

11. Dans des manuels pour l'école primaire édités avant 1995

Les manuels pour le CM2, publiés avant le changement de programme de 1995 [93] par trois éditeurs importants [94], proposent une activité préparatoire dont l'objectif est de souligner l'importance de la propriété suivante : en multipliant respectivement par deux nombres *a* et *b* les deux facteurs d'un produit, on multiplie ce produit par *ab* ; les deux nombres *a* et *b* étant 10, 100 ou 1000...

Cette propriété permet le calcul du produit de deux décimaux. Ainsi, par exemple, pour connaître le produit $p = 18{,}5 * 0{,}75$, il suffira de calculer $q = 185 * 75 = 13\,875$, de repérer que $q = p * (10 * 100) = p * 1\,000$ puisque $185 = 18{,}5 * 10$ et $75 = 0{,}75 * 100$, ce qui permettra enfin de conclure que $p = q \div 1000 = 13{,}875$. Cette propriété justifie la méthode classique : on calcule sans tenir compte de la virgule puis on place la virgule après avoir totalisé le nombre de décimales des deux facteurs. Remarquons l'utilisation implicite de la commutativité et de l'associativité de la multiplication.

Le manuel de la collection « Objectif Calcul » édité par Hatier

Ce manuel propose un chapitre qui commence directement par l'étude de cette propriété. La méthode classique n'est pas complètement livrée aux élèves. La multiplication d'un décimal par 10, 100 ou 1 000 ainsi que la division d'un entier par 10, 100 ou 1 000 qui ont été vues l'année précédente, ne font pas l'objet de révisions dans ce manuel.

La page d'activités préparatoires de ce manuel figure à la page suivante.

Ce chapitre contient, après l'activité de découverte et l'aide-mémoire, huit exercices. Aucun d'entre eux ne fait intervenir de problème multiplicatif, tous portent sur des nombres abstraits. Les deux premiers exercices sont des multiplications de décimaux par 10, 100 ou 1000 ; l'enseignant peut donc les utiliser pour les révisions mais aucun exercice ne propose de division par 10, 100 ou 1000. Le troisième exercice est une liste de multiplications d'un décimal par un entier et les quatre autres portent sur le placement de la virgule dans l'écriture du résultat d'un produit de deux décimaux. Ces exercices sont donc essentiellement des applications techniques.

---

[93] Programme de 1985, en vigueur en CM2 jusqu'à la rentrée 1997-98.

[94] *Objectif Calcul* CM2 (1988), Paris : Hatier. [pp. 28-29].
Diagonale CM2 (1994), Paris : Nathan. [pp. 86-87].
Math et Calcul CM2 (1988), Paris : Hachette. [pp. 142-147].

Objectif Calcul CM2, Hatier 1988.

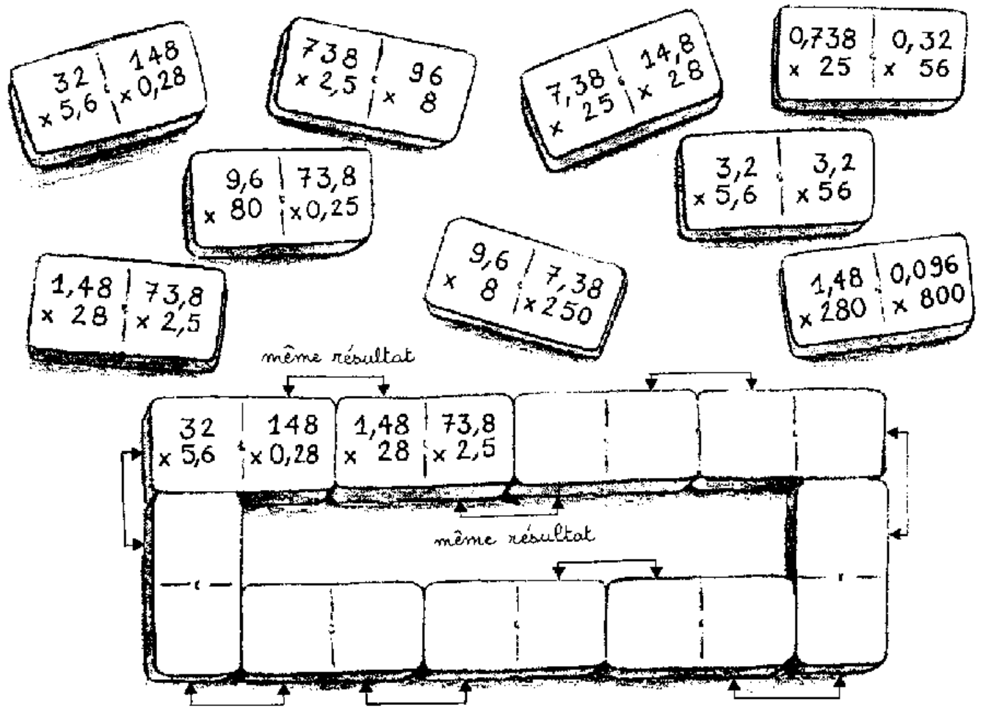
8 MULTIPLICATION des nombres décimaux

Réinvestir la technique de la multiplication dans $\mathbb{N}$ à la multiplication dans $\mathbb{D}$.

découverte

Voici des dominos en désordre. Replace-les correctement en observant la façon dont on a commencé.

Tu n'as pas besoin de compter les opérations, fais seulement bien attention aux produits proposés et au nombre de chiffres après la virgule que doivent comporter les résultats.



aide-mémoire

Pour effectuer la multiplication

- d'un nombre entier par un nombre décimal ou
- d'un nombre décimal par un autre nombre décimal,

tu effectues d'abord l'opération comme si les deux nombres étaient entiers, puis tu places la virgule. EXEMPLES :

38		38
× 2,6	→ m 10 →	× 26
		228
		76.
98,8	← d 10 ←	988

14,7	→ m 10 →	147
× 5,2	→ m 10 →	× 52
		294
		735.
76,44	← d 100 ←	7644

Nous avons pourtant relevé une question susceptible de provoquer un questionnement puis l'utilisation du calcul approché pour répondre : on demande en effet de placer la virgule manquante dans l'égalité 61,8 * 3,5 = 2163. La réponse est 216,3 qui ne comporte qu'un chiffre après la virgule alors que le nombre total de décimales des deux facteurs est deux. Cette difficulté n'apparaît pas quand les élèves posent l'opération puisqu'ils trouvent dans un premier temps 21 630 et dans un second temps 216,30 qu'ils peuvent écrire 216,3. Le dernier exercice propose la même difficulté : l'élève doit compléter des égalités sans effectuer de calcul avec l'une des trois propositions :

a) 548 * 10,5 =.... propositions : 575,4 ; 10 754 ; 5 754.

b) 9 538 * 0,95 =... propositions : 9 061,1 ; 906,1 ; 90 611,1.

Un raisonnement utilisant les ordres de grandeur suffit pour conclure. La question a) propose un nombre avec un chiffre après la virgule 575,4 qui peut être une source d'erreur pour les élèves qui appliqueraient trop strictement la règle de position de la virgule. Ce résultat peut être rejeté facilement (trop facilement ?) par un argument d'ordre de grandeur 500 * 10 = 5000.

L'argument de l'ordre de grandeur n'aurait pas été suffisant pour réfuter, par exemple, la réponse 5 754,4 si elle avait figuré parmi les propositions. Cette remarque pour montrer que le manuel ne propose pas de situation pour travailler sur l'origine même de l'erreur commise. En conséquence nous pensons que le résultat faux 575,4 est rejeté « trop facilement » par un argument d'ordre de grandeur : durant le déroulement de la correction de cet exercice, pour convaincre cet élève que sa réponse est fausse, l'enseignant ou un autre élève pourrait utiliser seulement un argument d'ordre de grandeur qui montre que le résultat ne convient pas plutôt que de développer un argument qui réfute la méthode erronée (le nombre de décimale du produit est la somme des nombres de décimales des facteurs). Avec l'énoncé du manuel, l'élève qui aurait proposé 575,4 saurait qu'il avait donné une réponse fausse mais resterait sans réponse quant aux véritables raisons de son échec. Sauf intervention complémentaire de l'enseignant...

Cette séquence est suivie d'une série de douze exercices intitulée « multiplication des nombres décimaux : prolonger le sens de la multiplication. » Sur les douze, quatre seulement nécessitent la multiplication de deux décimaux : trois problèmes de prix au kg et un calcul d'aire de rectangle avec rappel de la formule. Tous les autres portent sur la multiplication d'un décimal par un entier. En outre, le titre de la séquence est très inducteur quant au choix de l'opération, de nombreux élèves se trouvent enclins à multiplier les données pour répondre à la question plus par effet de contrat que par une réelle prise de sens de la multiplication. Après cette séquence, six double-pages d'une rubrique « Résolution de problèmes » sont proposées. En fait l'élève n'a jamais à résoudre complètement un problème : sur une double-page il doit repérer les informations, sur une autre il doit repérer la question, etc. Enfin, sur deux double-pages qui comportent vingt-huit énoncés, il doit déterminer l'opération qui donne la solution ; nous nous attendions à ce que les auteurs poursuivent enfin l'objectif de « *prolonger le sens de la multiplication* » mais aucun des énoncés ne porte sur la multiplication de deux décimaux...

Le manuel de la collection « Diagonale » édité par Nathan.

Ce manuel ne propose pas d'activité qui porte directement sur la propriété déjà citée : « en multipliant respectivement par deux nombres *a* et *b* les deux facteurs d'un produit... »

La page d'activités préparatoires de ce manuel figure à la page suivante.

Il propose une première tâche portant sur les unités, dixièmes, centièmes, sur la multiplication de facteurs égaux à 10, 100 ou 1000, et enfin sur le produit et le quotient d'un nombre par 10, 10 ou 1000. Il propose ensuite une seconde tâche qui pose le problème du calcul du produit de deux décimaux. La méthode de calcul avec multiplication des facteurs décimaux pour obtenir des facteurs entiers est mise en œuvre parallèlement à la méthode classique, l'élève doit comparer les méthodes et conclure.

Huit exercices sont proposés dans cette séquence, cinq portent sur des calculs ou des décalages de virgule avec des nombres abstraits. Les trois autres sont issues de situations concrètes mais, dans deux d'entre eux, les produits à effectuer ont un facteur entier et peuvent être compris avec une multiplication héritée de l'addition répétée. Le seul exercice qui nécessite le calcul du produit de deux décimaux est la conversion de 4,15 milles en km sachant que 1 mille ≈ 1,6 km mais la question est posée après celle de la conversion de 7 milles en km, les élèves peuvent donc procéder par analogie et l'addition réitérée reste le seul modèle multiplicatif convoqué. Cette séquence n'est pas suivie d'une séquence de réinvestissement.

Comme dans « Objectif Calcul », dans les séquences de résolution de problèmes, on ne trouve dans le manuel « Diagonale » pratiquement aucun problème multiplicatif où les deux facteurs sont directement décimaux. Seulement quelques problèmes de prix au kg sont proposés, pour les autres situations (proportionnalité, calcul d'aire...) les formules sont données ou induites par des questions qui portent sur des nombres entiers avant que les questions qui portent sur les nombres décimaux ne soient posées.

Le manuel de la collection « Math et Calcul » édité par Hachette.

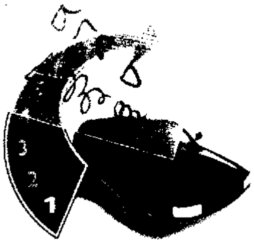
Ce manuel, plus connu dans la profession par le nom de l'un des auteurs [95], ne se distingue pas de ceux que nous venons d'étudier.

L'activité de découverte consiste en un travail de lecture d'une expérience. Le maître a demandé le calcul de 6,45 * 2,3 à la calculatrice, un élève obtient 14,835, le maître demande aussi 645 * 23, l'élève trouve 14 835. Le maître montre alors au tableau la relation entre les deux calculs puis indique la disposition usuelle du calcul. Il n'y a pas de « cours » sur cette notion. La page de découverte se termine sur un calcul de valeur approchée d'un produit.

Les exercices qui suivent sont des applications de la technique opératoire pour 30% d'entre eux, ils posent des problèmes de prix pour 60% d'entre eux, un exercice propose le calcul de la consommation d'un individu qui boit 7 bouteilles d'eau de 1,5ℓ, les autres exercices sont du calcul mental.

[95] Ce manuel est souvent appelé le « Eiller » par les enseignants.

Diagonale CM2, Nathan 1994

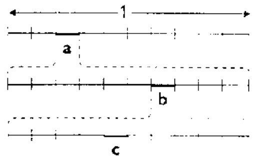


Opérations avec les nombres décimaux (2)

Avec les nombres...
Enlever 2,5 aux nombres 3,7 10,8 3,68 7,05...

1 Activités

a Le segment rouge a pour longueur l'unité.
Observe le segment **a** vu à travers une loupe, puis le segment **b** vu à travers une loupe :



Écris la longueur des segments a, b et c en prenant le segment rouge pour unité.

b En t'aidant du schéma précédent, recopie d'une même couleur les nombres égaux.

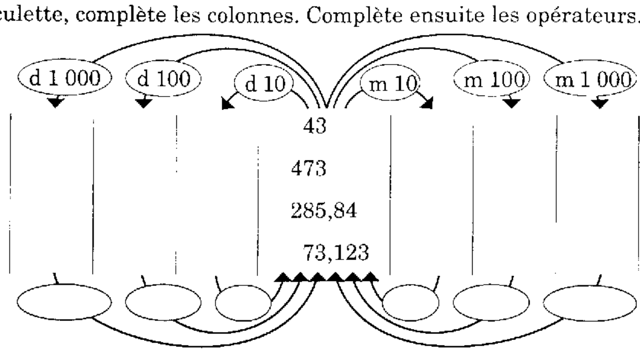
$10 \times \frac{1}{10}$ $10 \times \frac{1}{100}$ $10 \times 0{,}001$

1 $10 \times 0{,}1$ $10 \times \frac{1}{1\,000}$

$10 \times 0{,}01$ $\frac{1}{10}$ $0{,}01$

100 $100 \times \frac{1}{100}$ $1\,000 \times \frac{1}{1\,000}$

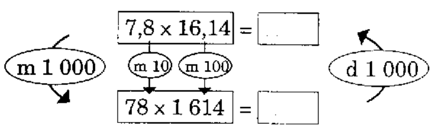
c Avec ta calculette, complète les colonnes. Complète ensuite les opérateurs.



2

Observe ce qu'ont écrit Thomas et Mathieu pour calculer 7,8 x 16,14.

Thomas



Mathieu

- Je calcule comme s'il n'y avait pas de virgule.
  1 614 x 78 = 125 892
- Je compte le nombre de chiffres après la virgule dans **7,8** et **16,14** → **3**
- Dans le produit précédent, je place la virgule à 3 rangs à partir de la droite.
  Donc 7,8 x 16,14 = 125,**892**.

- Termine les calculs de Thomas et vérifie que Mathieu trouve le même résultat.
- Explique pourquoi les deux élèves procèdent finalement de la même façon.
- Calcule les produits.
  19,3 x 8,171 35 x 6,07 20,7 x 30,01

Vérifie les résultats avec ta calculette.

Quel enseignement de la multiplication des décimaux ?

L'étude de ces trois manuels montre une ambition commune de montrer aux élèves les justifications de la technique opératoire de la multiplication des décimaux quand celle de la multiplication des entiers est supposée acquise. Le manuel « Objectif Calcul » propose, en outre, quelques exercices pour faire réfléchir les élèves sur le nombre de chiffres qui figurent après la virgule dans un produit de deux décimaux. Cette ambition était conforme aux instructions officielles en cours au moment de leur publication. [96]

> L'élève sera apte à calculer sur les nombres ; pour cela il devra (...) maîtriser les techniques opératoires usuelles addition, soustraction, multiplication des entiers ou des décimaux (...)

Pour répondre à cette ambition de *maîtrise* exprimée dans les programmes, les trois manuels proposent une méthode pour placer la virgule. Elle impose à l'élève une action issue d'une réflexion proche des justifications théoriques alors qu'avec la technique usuelle, les élèves n'ont qu'à compter les chiffres placés après la virgule dans les facteurs du produit. Cette ambition n'est pas nouvelle mais elle n'a pas toujours été partagée, comme le rappelle Denis Butlen [97] en citant respectivement un extrait du « Manuel du Certificat d'Aptitude Pédagogique » paru en 1904 aux éditions Brossard-Deferdon-Hachette (×) puis un article de J. Tannery intitulé « Sur l'enseignement de l'arithmétique à l'école primaire » paru la même année (××) :

> (×) On dit souvent : peu ou point de théorie. Que restera-t-il donc ? La routine, le calcul machinal de chiens savants ou des automates. Nous dirons, nous : sans doute, il fait accoutumer les enfants à opérer vite ; c'est un but matériel et pratique qu'il est désirable d'atteindre. Mais qu'on ne craigne pas non plus de les accoutumer à se rendre compte de leurs opérations. (...) des enfants du cours moyen ne peuvent - ils pas savoir utilement (...) pourquoi dans un produit, on doit reculer la virgule vers la gauche d'autant de chiffres qu'il y en a dans les deux facteurs réunis ?
>
> (××) Le maître dira : « je vais vous apprendre un moyen d'aller plus vite ; » il enseignera le mécanisme de la règle. Je ne suis nullement scandalisé à l'idée que l'enfant ne se rendra pas compte du pourquoi de ce mécanisme, et la confiance qu'il accordera à son maître ne me déplaît en aucune façon. (...) en arithmétique deux points importants : reconnaître quelles opérations on doit faire, c'est-à-dire au fond bien comprendre les définitions ; puis savoir faire correctement ces opérations : le premier point est affaire d'intelligence, le second de routine, ou, pour parler mieux, d'habitude.

---

[96] Extrait de la rubrique consacrée aux mathématiques dans les programmes de 1985.

[97] BUTLEN D. (1985), *Introduction de la multiplication à l'école primaire : histoire, analyses didactiques, manuels actuels,* Cahier de didactique des mathématiques n°19, Paris : IREM de Paris 7. [pp. 43 à 47].

Aujourd'hui, la question est, comme nous le soulignons, tranchée depuis plus de vingt ans [98] :

> L'étude de la multiplication débutera par la recherche de situations où, *a* et *b* étant décimaux, l'expression $a * b$ ait une signification (la vie courante, les achats de matériaux divers en fournissent à volonté). Ce travail précédera dans tous les cas l'étude du prolongement de la technique de la multiplication qui en est directement dépendante et *ne doit surtout pas se limiter à la mise en place d'un mécanisme aveugle*.

Cet extrait des instructions officielles permet de constater, en revanche, un certain renoncement dans les deux manuels en ce qui concerne les situations de résolution de problèmes multiplicatifs avec des nombres décimaux. Les programmes demandaient que l'élève sache « *reconnaître les problèmes qui relèvent des opérations évoquées précédemment* » c'est–à–dire, entre autres, les problèmes qui mènent à la multiplication de deux décimaux. Nous avons montré que ces trois manuels proposent peu de situations susceptibles de permettre cette acquisition. Les élèves peuvent résoudre les problèmes en ayant l'addition répétée comme seul modèle implicite de la multiplication. Enfin, remarquons que les propriétés algébriques de l'opération ne sont jamais abordées.

12. Dans des manuels de collège édités en 1996 [99]

Les manuels de collèges sont tous organisés, et pour tous les chapitres, de la même façon : des activités préparatoires partagées entre des révisions de prérequis et des situations de découvertes de nouveaux savoirs, un cours partagé entre ce qu'il faut savoir (définitions, règles...) et ce qu'il faut savoir–faire (méthodes, exercices types...), des exercices d'applications classés dans différentes rubriques (entraînement, approfondissement, soutien...) Ils sembleraient donc tous proposer des enseignements classés dans la deuxième ou la troisième catégorie. Derrière cette uniformité de présentation, notamment par une analyse de tâches de la partie consacrée aux activités préparatoires, nous avons constaté des différences qui expliquent que nous trouvions des manuels de collège dans cette première catégorie : « de la technique opératoire aux problèmes multiplicatifs ». Nous montrerons aussi une diversité quant aux justifications de la technique de la multiplication des décimaux et quant aux situations multiplicatives proposées.

Remarquons le manuel « *Triangle* » des éditions Hatier qui, et c'est le seul, propose, dans les activités préparatoires, une série d'exercices dont l'objectif est un repérage « d'obstacles » c'est–à–dire de conceptions ou de procédures à l'origine des erreurs les plus fréquentes, puis une autre série d'exercices « pour franchir les obstacles ». Des annotations marginales permettent la mise en correspondance des exercices qui servent à repérer un obstacle et de ceux qui servent à le franchir.

[98] Instructions pédagogiques des programmes du 7 juillet 1978.

[99] La première édition postérieure au changement de programme date de septembre 1996, il en a eu une deuxième en septembre 2000 mais nous n'avons pas examiné ces manuels.

Nous allons étudier ici les manuels dont l'enseignement est conforme à la première démarche. Nous examinerons d'abord comment la multiplication est présentée puis comment elle est réinvestie.

Présentations de la multiplication de deux nombres décimaux

Parmi les manuels dont les auteurs ont choisi de donner une méthode sans laisser l'élève la découvrir ou la formuler, la présentation de la multiplication diffère.

Les auteurs du manuel de la collection « *Cinq sur cinq* » des éditions Hachette ont fait le même choix que ceux du manuel « *Diagonale CM2* » des éditions Nathan. Après des activités de révision sur les ordres de grandeur, sur les décalages de virgule dans le produit d'un décimal par un entier, mais sans aborder l'effet de la multiplication par 10 ou 100 de l'un des facteurs d'un produit, une tâche de comparaison de deux méthodes de calcul du produit de deux décimaux est proposée à l'élève : la méthode de décalage de la virgule qui est explicitée complètement et la méthode issue de la propriété « en multipliant respectivement par deux nombres *a* et *b* les deux facteurs d'un produit, on multiplie ce produit par *ab* ; les deux nombres *a* et *b* étant 10, 100 ou 1000... »

Dans le cours les deux méthodes sont présentées parallèlement en utilisant les effets de la disposition dans la page ainsi que des couleurs pour les décimales.

On retrouve, dans les activités préparatoires, des exercices pour que l'élève critique la proposition erronée mais proche de la règle de décalage de la virgule : « le produit de deux décimaux comporte autant de chiffres après la virgule que les deux facteurs. » L'élève doit corriger les trois calculs suivants [100] et pour deux d'entre eux le produit (pourtant faux) a autant de décimales écrites que les deux facteurs ensemble :

3,8 5		0,1 8
* 2 0,6		* 4 5 0
2 3 1 0	1 3,4 * 0,2 = 2 6,8	9 0
6 7 0 0		7 2
9,0 1 0		8,1 0

Les auteurs du manuel de la collection « *Mathématiques* » des éditions Delagrave sont les plus directs : après un rappel - intitulé « *Un bon produit* » - où la multiplication d'un décimal par un entier est définie par une addition réitérée (3,5 * 4 = 3,5 + 3,5 + 3,5 + 3,5), et quatre courts exercices d'application introduisant des écritures littérales, on peut lire [101]

> 2. Avec des virgules
>
> Tu sais calculer le produit d'un nombre entier par un nombre décimal.
>
> Calcule : 17 * 0,4 ; 7,38 * 5 ; 5,4 * 236 ; 0,05 * 12
>
> Tu vas maintenant calculer des produits dont les facteurs ne sont pas des nombres entiers.

---

[100] *Cinq sur cinq Math 6e* (1996), Paris : Hachette. [p. 59].

[101] *Mathématiques 6e* (1996), Paris : Delagrave. [p. 33].

Observe : 6,**27** * 3,**5** = 21,**945**

$$\begin{array}{r} 6,\mathbf{2\ 7} \\ *\quad 3,\mathbf{5} \\ \hline 3\ 1\ 3\ 5 \\ 1\ 8\ 8\ 1 \\ \hline 2\ 1,\mathbf{9\ 4\ 5} \end{array}$$

Une annotation marginale du manuel (dans sa version spéciale destinée aux professeurs) précise que la multiplication de deux décimaux n'est plus au programme de l'école primaire. Dans le rappel, les auteurs présentent 3,5 * 4 comme une somme de quatre termes. Avec cette définition, l'expression 4 * 3,5 n'a pas de sens. Dans le deuxième point, ils affirment pourtant que l'élève sait déjà calculer le produit d'un entier par un décimal et ils proposent les deux types de produits. La commutativité reste totalement implicite. De même, dans la présentation de la multiplication de deux décimaux, les chiffres après la virgule - que nous avons indiqués en gras dans la citation - sont imprimés en rouge, la méthode n'est pas écrite. Elle ne figure pas non plus dans le cours si bien qu'elle n'apparaît nulle part dans ce manuel.

Les auteurs du manuel de la collection « *Triangle* » des éditions Hatier, ont fait un choix opposé : aucune méthode de calcul du produit de deux décimaux n'apparaît dans les activités préparatoires alors que la règle de décalage de la virgule figure dans le cours ; trois problèmes de prix à payer conduisant à une multiplication de deux décimaux sont proposés dans les activités préparatoires. Nous pouvons formuler deux hypothèses. Soit les auteurs prévoient que le professeur doit exposer une méthode de calcul avant de proposer les activités préparatoires, ce qui semble contradictoire avec les instructions officielles, soit les auteurs préfèrent laisser les élèves calculer un tel produit avec la calculatrice ou par des méthodes personnelles comme ils le feraient à l'école primaire d'après les indications ministérielles [102] :

> Bien que le travail concernant le produit de deux décimaux ne figure pas au programme de l'école primaire, les élèves auront pu être confrontés à des problèmes du type :
>
> - calcul de « l'aire du rectangle » ou du « périmètre du cercle » (compétences inscrites dans le programme du cycle des approfondissements), en ayant recours à la calculatrice ;
>
> - recherche du « prix de 3,5 kg de fromage à 80,60 F le kg » où ils auront pu utiliser des procédures personnelles, par exemple liées à la proportionnalité (calcul du prix de 3 kg, puis du prix de 500 g considéré comme un demi - kg).

La seconde hypothèse nous semble plus probable compte tenu des activités des auteurs (formateurs en IUFM, auteurs d'un ouvrage de préparation au concours de professeur des écoles...) mais alors rien n'est prévu dans ce manuel pour passer des procédures personnelles à la technique usuelle qui figure dans le cours.

[102] Mathématiques : articulation école–collège, BO n°44 du 5 décembre 1996.

Les réinvestissements : calculs, questionnements théoriques et problèmes

Les exercices proposés dans les manuels de collège sont bien plus nombreux que dans ceux de l'école primaire. Afin de mieux rendre compte des propositions faites aux professeurs par les auteurs, nous avons relevé, dans un premier temps, tous les exercices qui portent sur la multiplication et, dans un second temps, ceux qui font intervenir le produit de deux décimaux. Pour ceux qui portent sur la multiplication de deux décimaux, nous avons adopté un classement proche de celui qui est utilisé par les auteurs de manuels et qui permet de rendre compte à la fois des distinctions opérées grâce à l'analyse menée au chapitre précédent et des critères liés à l'apprentissage qui nous viennent des outils développés en didactique des mathématiques.

Ainsi avons-nous regroupé les exercices dont l'objectif est de déterminer un produit en distinguant ceux qui demandent une simple application de la technique opératoire, ceux qui demandent de réinvestir des propriétés algébriques de la multiplication (calcul mental ou raisonné) et ceux qui font utiliser les ordres de grandeur des facteurs (problèmes d'approximation qui demandent de mobiliser des connaissances sur l'écriture décimale). Nous avons regroupé ensuite les exercices qui soulèvent des questions plus théoriques, généralement relatives aux propriétés de la multiplication. Nous avons regroupé enfin les problèmes numériques issus de situations multiplicatives (ici problèmes de prix, problèmes de conversion, calcul d'aire de rectangles). Nous pouvons dresser le tableau suivant où les pourcentages sont calculés par rapport aux exercices faisant intervenir une multiplication de deux nombres décimaux :

	Cinq sur cinq	**Mathématiques**	**Triangle**
Exercices sur la multiplication	35	36	45
Mult. de deux décimaux	18	15	17
Détermination du produit	**7 (39%)**	**8 (46%)**	**11 (64%)**
Technique opératoire	2 (11%)	3 (20%)	5 (29%)
Calcul mental	3 (17%)	2 (13%)	1 (06%)
Ordre de grandeur	2 (11%)	2 (13%)	5 (29%)
Questions théoriques	**6 (33%)**	**5 (33%)**	**4 (24%)**
Situations multiplicatives	**5 (28%)**	**3 (21%)**	**2 (12%)**
Problèmes de prix	4 (22%)	1 (07%)	1 (06%)
Problèmes de conversion	1 (06%)	1 (07%)	1 (06%)
Calcul d'aire de rectangles	0 (00%)	1 (07%)	0 (00%)

Tableau 4. Comparaison des exercices proposés par trois manuels de collège

On remarque quelques régularités et des tendances différemment affirmées suivant les collections. La multiplication de deux décimaux concerne environ un tiers des exercices portant sur la multiplication dans le manuel « *Triangle* » contre environ la moitié dans les deux autres. Les auteurs de ce manuel ont donné une plus grande importance que les autres aux situations multiplicatives issues de problèmes de dénombrement ; ces situations conduisent à la multiplication de nombres entiers pour calculer le cardinal d'un produit cartésien et qui permettent l'étude de situations multiplicatives difficiles à interpréter par une addition réitérée.

La différence du nombre d'exercices de technique opératoire s'explique plus difficilement : des auteurs ont pu choisir de ne pas en encombrer leur manuel car les professeurs de collège peuvent aisément improviser dans cette catégorie d'exercices en adaptant la difficulté des opérations aux acquisitions de leurs élèves. Remarquons en revanche l'importance accordée par les auteurs aux problèmes portant sur des questions théoriques. Cette importance semble témoigner de l'ambition des auteurs quant à l'acquisition raisonnée de la technique opératoire.

Comparativement à cette ambition, les problèmes issus de situations multiplicatives ne sont pratiquement pas traités. On peut supposer que des problèmes qui nécessitent des calculs d'aires ou des conversions sont abordés dans d'autres chapitres ultérieurs mais il faut alors en conclure que ces problèmes sont plutôt conçus par les auteurs comme des applications de la multiplication des décimaux ou comme des applications de formules que comme une phase de l'enseignement de la multiplication. Un tel choix n'empêche cependant pas un professeur de revenir sur la construction de la notion de cette opération à l'occasion de ces calculs. Mais il peut aussi s'interpréter comme une mise en œuvre du caractère outil de la multiplication à cette période de l'enseignement, plutôt que comme un retour sur l'apprentissage de son caractère objet. Cela constituerait un renoncement par rapport à l'ambition des instructions officielles [103] :

> En sixième, il s'agit donc désormais de faire acquérir par les élèves le produit de deux décimaux, aussi bien pour ce qui concerne la technique de calcul que pour ce qui concerne le sens (reconnaissance des situations où intervient le produit de deux décimaux). Ce dernier apprentissage est difficile dans la mesure où il existe une rupture de sens avec les cas du produit de deux naturels et d'un décimal par un naturel, cas pour lesquels la référence à l'addition réitérée est possible pour accéder à la multiplication.

Il est également possible que les auteurs de ces manuels supposent qu'une bonne acquisition technique de la multiplication suffit à ce que les élèves sachent repérer les situations qui relèvent de la multiplication.

13. Des différences entre les manuels pour l'école et ceux pour le collège

Dans les manuels dont les auteurs ont choisi d'exposer technique opératoire usuelle puis de proposer des exercices d'application, nous pouvons constater des points communs et des différences entre les ouvrages destinés à l'enseignement élémentaire et ceux destinés au collège.

Les ouvrages du primaire approfondissent plus que ceux du collège les justifications théoriques de la technique opératoire dans les activités préparatoires mais beaucoup moins dans les exercices d'applications. Les exercices de simple technique opératoire sont moins nombreux dans les manuels de collège que dans ceux du primaire (on peut penser qu'ils sont laissés à la charge des professeurs de mathématique). Les calculs d'approximations et les questionnements théoriques sont plus nombreux dans les manuels de collège que dans ceux du primaire.

[103] Mathématiques : articulation école–collège, BO n°44 du 5 décembre 1996.

Dans les deux types d'ouvrages, les problèmes issus de situations multiplicatives sont délaissés. L'enseignement de la multiplication est décontextualisé. Les programmes préconisent pourtant à la fois l'acquisition de la technique et l'acquisition du sens, ils soulignent la nécessité d'enseigner la multiplication dans des situations qui donnent du sens à cette opération.

Qu'en est - il dans les autres propositions d'enseignement ? Nous allons maintenant étudier les publications de la deuxième catégorie c'est - à - dire dont les enseignements proposent des tâches où la méthode pour multiplier deux décimaux est construite par les élèves (au moins en partie) avant d'être institutionnalisée par l'enseignant puis être appliquée dans des problèmes.

2. Des activités, une technique, des problèmes multiplicatifs

Les publications des auteurs qui ont choisi cet enchaînement dans leur projet d'enseignement de la multiplication des décimaux sont rares. Dans les brochures ou les ouvrages destinés aux enseignants ou aux candidats au concours de recrutement des professeurs des écoles, on trouve des propositions de cette catégorie ou de la troisième pour la multiplication de deux entiers. Ces enseignements sont riches de problèmes de dénombrement qui donnent à la multiplication un autre sens que celui de l'addition réitérée du fait de la bidimensionnalité. Différentes techniques de multiplication de deux entiers sont approfondies et comparées (méthode des rectangles appelée aussi multiplication de type égyptien, méthode des réseaux appelée aussi méthode chinoise ou méthode des baguettes, méthode de l'abaque, méthode per gelosia...), situations multiplicatives et techniques opératoires n'étant pas forcément reliées. différents problèmes multiplicatifs sont proposés. Dans ces ouvrages, la multiplication de deux décimaux n'est jamais traitée, même dans ceux qui ont été publiés avant que cette opération ne disparaisse du programme de l'école primaire. Un titre du type « *Addition, soustraction et multiplication dans l'ensemble des décimaux* » figure parfois dans le sommaire mais, dans ce cas, la multiplication est délaissée au profit de l'addition ou de la soustraction.

Nous avons trouvé des propositions d'enseignement de cette catégorie dans des manuels mais seulement dans ceux pour le collège. Pouvons - nous expliquer leur absence des livres pour l'école par une évolution de ces manuels ? Afin de répondre à cette question, nous avons fait une exception à notre choix de ne pas considérer les ouvrages antérieurs aux années quatre–vingts. Nous allons montrer, par un exemple, comment la multiplication des décimaux était introduite par des activités à l'école primaire avant la réforme des « mathématiques modernes ». Puis nous nous pencherons sur les manuels de collège.

21. Dans un manuel d'arithmétique de 1947

Nous avons choisi un manuel qui nous semble offrir des garanties quant à la l'adéquation des enseignements proposés aux programmes officiels : les auteurs sont trois inspecteurs, un Inspecteur général de l'Instruction publique et deux

Inspecteurs de l'Enseignement primaire. Il s'agit du cours d'arithmétique pour le cours supérieur et la classe de fin d'étude, édité en 1947 par les éditions Armand Colin [104]. Dans ce manuel, la technique de la multiplication des décimaux est construite à partir d'exercices préparatoires avant d'être formulée puis utilisée dans des problèmes, et les situations de cette construction sont cohérentes avec les utilisations ultérieures.

Présentation de la multiplication.

Les auteurs proposent une activité préparatoire puis un énoncé de la règle [105].

> Exercice d'observation : produit de deux nombres décimaux.
>
> 1° Vous voulez trouver le prix de 12 kg. de beurre à $43^{\mathrm{f}},40$ le kilogramme. Que vaut le kilogramme en centimes ? Que valent les 12 kg. en centimes ? Que valent - ils en francs ?
>
> 2° Vous voulez calculer le poids de $4^{\ell},5$ d'huile pesant $0^{\mathrm{kg}},92$ le litre.
>
> Quel est le poids du litre en grammes ? le poids du décilitre ? le poids de 45 dl. ? Donnez ces poids en kilogrammes.
>
> *Pour multiplier deux nombres décimaux, on fait l'opération sans tenir compte des virgules, puis on sépare à la droite du produit autant de chiffres décimaux qu'en comportent à la fois le multiplicande et le multiplicateur.*

Ces exercices d'observation venaient - ils illustrer une explication du maître ou devaient - ils préparer les élèves à aborder la question de la technique opératoire ? Dans la seconde hypothèse, pourquoi la formulation de la règle n'est - elle pas demandée ? Le format très réduit des manuels de l'époque explique peut-être qu'on ne demande pas, par écrit, à l'élève de formuler une règle ; les enseignants ont la possibilité de poser la question oralement et d'organiser une discussion dans la classe. Cette possibilité ne doit pas être écartée, citons l'introduction des programmes du 17 octobre 1945 de l'enseignement du premier degré :

> Partout, l'opération manuelle doit précéder l'opération arithmétique ; l'expression du langage courant doit précéder l'expression du langage mathématique...
>
> (...) Il importe également de comprendre et apprendre la règle du déplacement de la virgule, soit par changement d'unité, soit par multiplication ou division par 10, 100, 1000.

On constate que la construction de la technique opératoire repose sur une conception du nombre décimal héritée du nombre entier-mesure avec changement d'unité, en conformité avec les programmes. Cette conception permet de poser autrement la multiplication de deux nombres décimaux qui sont des mesures : on change l'unité de mesure pour obtenir des entiers puis on convertit la valeur de la mesure obtenue dans l'unité issue des unités initiales. Comme les changements d'unité correspondent à des déplacements de la virgule, la méthode est aisément

[104] PUGIBET CH. (1947), *Arithmétique, cours supérieur, classe de fin d'études, certificat d'étude primaire*, Paris : Armand Colin. [pp. 94-108].

[105] *Ibid.* [p. 94].

généralisée par la règle énoncée. Nous avons montré néanmoins que cette méthode n'est pas générale [106], la technique opératoire usuelle n'est donc pas construite à proprement parler. Précisons enfin que dans ce manuel, conformément aux instructions, la multiplication de deux nombres entiers est définie par l'addition réitérée.

Les réinvestissements : calculs, questionnements théoriques et problèmes

Les réinvestissements de ce chapitre sont principalement des exercices d'application s'appuyant sur des situations multiplicatives, les nombres sont des mesures. Puis suivent trois chapitres portant sur les calculs d'aires (conversion de mesures, aire du rectangle et du carré, applications aux problèmes pratiques : peinture, carrelage, papiers peints, boiseries, doublures) totalisant une centaine d'exercices portant sur les prix, les masses, les longueurs, les aires et les volumes, les poids volumiques...

On trouve également des exercices analogues à ceux qui figurent aujourd'hui dans les manuels pour le collège sur les ordres de grandeurs ou qui posent des questions plus théoriques [107] :

> Ayant à effectuer le produit 275 * 4,25, un élève a trouvé 1 568,75. Pouvez-vous lui prouver qu'il s'est trompé ? Donnez le résultat exact.
>
> Ayant à calculer le prix de 4 tonnes et demie de charbon à 530 *f.* la tonne, ne vous est-il pas possible de remplacer la multiplication 530 *f.* * 4,5 par une multiplication portant sur des nombres entiers ? Justifiez votre réponse.
>
> Dans quel cas le produit est-il plus petit que le multiplicande ? Dans quel cas est - il plus petit que le multiplicateur ? Donnez des exemples présentés sous la forme de petits problèmes.
>
> Ayant à calculer la surface d'un champ, un élève donne la réponse suivante : $2\,365^{m^2},477\,586$. Lisez ce nombre. Que pensez - vous de cette précision ? Quelle réponse auriez - vous donnée ? Pourquoi ?
>
> Que devient la surface d'un rectangle : 1° Lorsqu'on double la longueur sans toucher à la largeur ? 2° Lorsqu'on triple la largeur sans toucher à la longueur ? 3° Lorsqu'on double les deux dimensions ? lorsqu'on les triple ? 4° Lorsque la longueur est doublée et la largeur triplée ? Donnez dans chacun des cas un exemple numérique.
>
> Le côté d'un carré mesure 8m. Quel est le périmètre de ce carré ? Quelle est sa surface ? Cherchez des rectangles ayant le même périmètre. Calculez leurs surfaces. Cherchez des rectangles ayant la même surface. Calculez leurs périmètres. Quelles remarques faites - vous dans chaque cas ?

---

[106] Dans le paragraphe consacré aux méthodes de calcul du produit de deux décimaux, nous avons étudié le cas des nombres « décimaux-système métrique ». Nous avons montré que le prix de 12 kg de beurre à 43,40 F/kg peut se calculer en calculant le prix en F/hg mais que cette méthode ne peut pas s'appliquer pour calculer le prix de 12,450 kg de beurre.

[107] *Ibid.* [pp. 94-108].

Quelle évolution jusqu'à nos jours ?

Des projets d'enseignement analogues à celui que nous venons de décrire n'apparaissent dans aucun manuel actuel. Pour mieux comprendre pourquoi, nous nous proposons de montrer, plus précisément que nous l'avons fait dans l'analyse *a priori* menée au chapitre précédent, les évolutions de programme et leurs conséquences sur l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux.

La méthode de calcul du produit de deux décimaux justifiée par les changements d'unité ne figure plus dans les manuels actuels. Les nombres décimaux ne sont plus systématiquement attachés à des unités de mesure. Ils l'étaient encore durant la période de l'enseignement primaire soumis aux programmes du 2 janvier 1970 où les changements d'unités justifiaient aussi la technique de multiplication de deux décimaux :

> Les nombres décimaux sont introduits au cours moyen ; à ce niveau les enfants savent écrire et nommer les nombres naturels à partir de groupement d'objets d'un ensemble.
>
> (...) Une ville comporte 10 850 habitants. Le millier étant choisi comme unité, la population s'exprime par le nombre décimal 10,850.
>
> (...) Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier. Elle se présente comme une addition de nombres décimaux égaux. Exemple :
>
> $0{,}2 * 3 = 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}6$.
>
> (...) Multiplication de deux nombres décimaux. Un changement d'unité la ramène à la multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier.

Rappelons que différents travaux sur les conceptions des nombres décimaux et sur les opérations à l'école primaire ont été publiés qui s'opposent à ce choix. Leurs auteurs justifient leur position en attribuant à ce choix l'origine de mauvaises acquisitions des élèves. Citons par exemple Guy Brousseau [108] :

> Le fait d'attacher les décimaux à des mesures conduit à les faire considérer par l'enfant comme un triplet (n, p, u) : d'une part un entier n d'autre part une division par 10^p, c'est-à-dire un changement d'unité, et une unité u : 3,25 mètres, c'est 325 cm exprimé en mètres. (...) Le décimal fonctionne comme un entier et n'est plus détachable d'une unité : l'objet n'est pas le décimal, mais la grandeur physique. L'élève ne peut alors interpréter le produit de deux décimaux que dans le cas par exemple du produit de deux longueurs, ce qui le ramène aux obstacles bien connus des

[108] BROUSSEAU G. (1998), Obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique, *in Théorie des situations didactiques (115–160),* Grenoble : La pensée sauvage. [pp. 131–132].

Version révisée de deux articles :

BROUSSEAU G. (1978), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques* 4/2 (165–198), Grenoble : La pensée sauvage.

BROUSSEAU G. (1989), Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In : Bednarz and C. Garnier (eds.) : *Construction des savoirs - Obstacles et conflits (41–63).* Montréal : Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage et le développement en éducation (CIRADE).

> nombres concrets : il aura du mal à concevoir $a^2 - a$ et traînera implicitement des équations aux dimensions.
>
> (...) Cette assimilation aux naturels sera évidemment renforcée par l'étude des opérations sous forme de mécanismes, c'est-à-dire d'actions que l'on effectue de mémoire, sans comprendre, comme dans les naturels, avec seulement un petit complément pour la virgule.
>
> De tête, le calcul suivra une autre pente. On calculera le produit de la partie entière et celui de la « partie décimale » et on recollera les morceaux : $(0,4)^2 = 0,16$ mais $(0,3)^2 = 0,9$ et quelquefois $(3,4)^2 = 9,16$.
>
> C'est encore l'effet de la mesure : ce qui compte le plus c'est la partie entière, la partie décimale fait ce qu'elle peut.

Depuis les programmes du 7 juillet 1978, la rupture est affirmée entre les nombres-mesures et les nombres décimaux qui doivent être introduits comme de nouveaux nombres ; et depuis, les modifications des instructions officielles n'ont pas touché à ce point de vue.

Ces programmes de 1978 indiquent aussi une évolution du sens de la multiplication quand on passe de la multiplication par un entier à celle de deux décimaux. Rappelons ce passage déjà cité :

> Pour l'addition et la soustraction, l'extension du sens de ces opérations au cas des nombres décimaux, ainsi que les aménagements correspondants des techniques ne posent pas de gros problèmes. Il en est de même pour la multiplication d'un décimal par un naturel, qui peut être interprétée comme une addition particulière.
>
> L'étude de la multiplication débutera par la recherche de situations où, a et b étant décimaux, l'expression $a * b$ ait une signification (la vie courante, les achats de matériaux divers en fournissent à volonté). Ce travail précédera dans tous les cas l'étude du prolongement de la technique de la multiplication qui en est directement dépendante et ne doit surtout pas se limiter à la mise en place d'un mécanisme aveugle.

En conclusion de cette observation de l'évolution des instructions officielles, nous pouvons distinguer, dans le temps, deux options divergentes pour l'enseignement des nombres décimaux qui ne sont pas sans conséquences sur celui de leur multiplication. Jusqu'en 1970, le nombre décimal est un nombre-mesure, la multiplication de deux décimaux (pour le sens et pour la technique opératoire) est traitée en continuité avec celle des nombres entiers, au moyen des changements d'unité, et la multiplication est appliquée à des situations qui font intervenir uniquement des nombres-mesures. La continuité n'est qu'apparente en ce qui concerne la technique opératoire puisque, comme nous l'avons montré, la méthode de changement d'unité n'est pas générale. Depuis 1978, le nombre décimal n'est plus seulement un nombre-mesure, ce changement a des conséquences sur la transition de la multiplication des entiers à celle des décimaux. D'une part, l'enseignement de la multiplication des entiers s'effectue seulement en référence aux situations d'isomorphisme de grandeurs qui sont les seules à s'interpréter comme une addition réitérée dans le cas où le multiplicateur est entier. Le sens de la multiplication reste donc partiel. D'autre part, le passage des entiers aux décimaux pour la technique opératoire repose sur l'utilisation de propriétés de la multiplication. Dans les manuels pour l'école primaire édités avant 1995, ces propriétés restaient implicites et par conséquent la technique n'était pas justifiée.

Examinons maintenant les propositions des auteurs des manuels de collège qui ont choisi de rédiger des activités où l'élève construit lui-même la multiplication de deux décimaux.

22. Dans des manuels de collège édités en 1996

Trois manuels pour la classe de sixième proposent des tâches où les élèves ont à leur charge l'élaboration de la multiplication des décimaux. Nous étudierons comment leurs auteurs présentent la multiplication ainsi que les réinvestissements proposés dans les pages d'exercices d'applications.

Présentations de la multiplication

Pour deux d'entre eux, cette élaboration repose sur l'utilisation de propriétés de la multiplication, pour le dernier, les élèves sont conduits à multiplier des décimaux avec la calculatrice et à formuler leurs constatations.

Les auteurs du manuel de la collection « *Le nouveau Transmath* » édité par Nathan ont rédigé un premier chapitre de révision des acquis de l'école primaire où les effets de la multiplication par 10, 100, 0,1 et 0,01 sont constatés par l'élève, rappelés par le manuel puis libellés comme des règles de décalage de la virgule. Le chapitre suivant est consacré aux quatre opérations. Une activité composée de deux exercices « à trous » présente la multiplication [109] :

> Tu sais effectuer à la main le produit de deux entiers,
> par exemple : 45 * 15 comme ci contre.
> On se propose maintenant de calculer 4,5 * 1,5.
> Pour cela, on peut remarquer que :
> 45 = 4,5 * 10 et 15 = 1,5 * 10
> 45 * 15 = 4,5 * **10 *** 1,5 * **10**
> 45 * 15 = 4,5 * 1,5 * **10 * 10**
> Ainsi : 675 = ... * **100**

$$\begin{array}{r} 45 \\ *\ 15 \\ \hline 225 \\ 45 \\ \hline 675 \end{array}$$

Et la conclusion s'impose d'elle même... Un autre exercice analogue propose une illustration qui met en parallèle deux multiplications posées : 1,23 * 6,5 et 123 * 65. Les nombres 1,23 et 123 comme les nombres 6,5 et 65 sont respectivement reliés par les opérateurs $—\boxed{*\ 100}\rightarrow$ et $—\boxed{*\ 10}\rightarrow$. Un texte « à trous » commente l'illustration. La présentation de la multiplication du manuel de sixième est donc très proche de celle du manuel de CM2 de ce même éditeur, elle n'est pas issue d'une situation multiplicative.

La règle énoncée dans la page de cours est celle du décalage de la virgule.

Dans un chapitre intitulé « *Nombres décimaux* », les auteurs du manuel de la collection *Décimale* édité par Belin consacrent une partie de leur livre à la

[109] *Le nouveau Transmath 6e*, (1996), Paris : Nathan [p. 24].

multiplication. Après une activité de révision sur les multiplications et divisions par 10, 100 ou 1000, les auteurs proposent une activité sur la multiplication des décimaux organisée en trois étapes :

- constatation sur des exemples numériques de l'effet sur le produit de la multiplication des facteurs par 10 et 100, puis un exercice de formulation à trou [110]

> Si on multiplie le premier facteur d'un produit par 100, et le second par 10, le produit est multiplié par......

- une illustration de deux multiplications posées : 3,58 * 7,2 et 358 * 72 avec indication d'opérateurs pour les facteurs à compléter pour les produits ;
- une question sur le nombre de chiffres après la virgule des différents nombres : facteurs et produit.

La présentation est donc la même que la précédente. La règle énoncée dans la page de cours est celle du déplacement de la virgule, elle est disposée en parallèle avec une illustration analogue à celle de l'activité avec les opérateurs.

Les auteurs du manuel de sixième de la collection *Math* édité par Bordas, ont choisi de présenter la multiplication des décimaux à partir d'une situation de conversion monétaire. L'activité est formulée comme un exercice très directif [111] :

> Pascal fait un voyage scolaire en Allemagne pour améliorer sa pratique de la langue allemande.
>
> Son professeur lui a dit : « Tu dois multiplier les prix en marks par 3,5 pour connaître les prix en francs ».
>
> Une montre coûte 37,8 DM et un appareil photos jetable coûte 12,7 DM.
>
> 1° Quel est le prix en francs de la montre ? de l'appareil photos jetable ? (Utilise ta calculatrice.)
>
> 2° Compare les produits suivants :
>
> a) 12,7 * 3,5 et 127 * 35. 37,8 * 3,5 et 378 * 35.
>
> b) 1,34 * 2,3 et 134 * 23. 2,41 * 3,27 et 241 * 327.
>
> Quelle règle peux-tu deviner pour multiplier deux nombres décimaux ?

Dans ce problème de conversion monétaire, la question de l'opération qu'il convient d'effectuer n'est pas laissée à l'élève, elle est imposée par l'énoncé (le professeur d'allemand) si bien que la situation n'aide pas à construire le sens de cette opération dans ce contexte. La technique de la multiplication est devinée mais elle n'est pas justifiée, elle reste « dans la calculatrice ». Les auteurs ont choisi de limiter la réflexion de l'élève à une conjecture issue d'une simple constatation. Dans la page de cours, la seule règle énoncée est celle du déplacement de la virgule.

Les réinvestissements : calculs, questionnements théoriques et problèmes

Voici un tableau analogue à celui que nous avions présenté pour les autres manuels de sixième. Nous avons repéré les exercices qui conduisent à une

[110] *Décimale 6e*, (1996), Paris : Belin [p. 85].

[111] *Math 6e*, (1996), Paris : Bordas [p. 41].

multiplication et, parmi eux, nous avons examiné ceux qui conduisent à la multiplication de deux décimaux. Les exercices qui répondent à deux critères (par exemple, calcul d'aire et conversion) sont comptés deux fois. Les pourcentages sont calculés par rapport aux exercices faisant intervenir une multiplication de deux nombres décimaux :

Tableau 5. Comparaison des exercices proposés par trois manuels de collège

	Transmath	**Décimale**	**Math**
Exercices sur la multiplication	43	77	22
Mult. de deux décimaux	31	54	11
Détermination du produit	**22 (71%)**	**12 (22%)**	**09 (82%)**
Technique opératoire	06 (19%)	05 (09%)	06 (55%)
Calcul mental	14 (45%)	07 (13%)	03 (27%)
Ordre de grandeur	02 (07%)	00 (00%)	00 (00%)
Questions théoriques	**03 (10%)**	**08 (15%)**	**02 (18%)**
Situations multiplicatives	**06 (19%)**	**34 (63%)**	**00 (00%)**
Problèmes de prix	05 (17%)	09 (17%)	00 (00%)
Problèmes de conversion	01 (03%)	07 (13%)	00 (00%)
Calcul d'aire de rectangles	00 (00%)	14 (26%)	00 (00%)
Autres (échelle, L/100km,...)	00 (00%)	04 (07%)	00 (00%)

On remarque une hétérogénéité des résultats très importante. Deux manuels sont assez proches (*Transmath* et *Math*), le troisième est sensiblement différent (*Décimale*).

On constate une variation importante de la quantité d'exercices proposés. De *Math* à *Décimale*, le nombre d'exercices portant sur la multiplication est multiplié par 3,5 et le nombre d'exercices portant sur celle de décimaux est multiplié par 5. Les exercices sur la multiplication de décimaux représentent 70% des exercices de multiplication pour *Transmath* et *Décimale* mais seulement 50% pour *Math*.

On remarque aussi une variation importante de la répartition des exercices proposés à l'élève. Les auteurs des manuels *Transmath* et *Math* concentrent les efforts de l'élève sur la détermination d'un produit (71% et 82% des exercices sur la multiplication de décimaux). Au contraire, ceux de *Décimale* proposent un travail à la fois important et très varié sur les situations multiplicatives (les problèmes représentent 63% des exercices sur la multiplication de décimaux).

Les résultats montrent encore une relative stabilité du pourcentage de questions plus théoriques sur la multiplication des décimaux. Le pourcentage moyen sur les trois manuels est de 14%, il est très inférieur à celui qui a été constaté dans les manuels où l'activité préparatoire se limite à une lecture de la règle et, éventuellement, de sa justification (28%). Peut-être cette différence s'explique-t-elle par une volonté des auteurs de compenser le manque d'activités théoriques dans les activités préparatoires.

Quel enseignement de la multiplication dans ces manuels de sixième ?

Contrairement à la demande institutionnelle, la construction de la multiplication des décimaux n'est, dans aucun de ces manuels de sixième, issue de situations multiplicatives. Néanmoins, la technique opératoire n'est pas toujours réduite à son mécanisme ; certains auteurs la relient à l'effet, sur le produit, de la multiplication de ses facteurs par 10, 100 ou 1000. Pour un autre, elle est le fruit d'une simple constatation des résultats affichés par la calculatrice. Les manuels contiennent aussi quelques exercices qui posent des questions plus théoriques sur l'opération.

Dans tous les manuels, la partie consacrée à ce qu'il faut savoir expose la règle de déplacement de la virgule. Une mise en parallèle avec l'effet, sur le produit, d'opérateurs appliqués aux facteurs est parfois proposée.

Un manuel se distingue nettement par le choix d'exercices d'applications. Alors que *Transmath* et *Math* accordent beaucoup d'importance à la technique opératoire et/ou aux questions théoriques en négligeant les études de situations multiplicatives, *Décimale* propose un choix nombreux et varié d'exercices de ce type en laissant l'entraînement à la technique opératoire à la charge du professeur.

3. Construction des connaissances, institutionnalisation et réinvestissements

Etudions les publications des propositions d'enseignement où la construction de la multiplication des décimaux est liée à la situation multiplicative qui pose le problème de cette multiplication. Leurs auteurs présentent des tâches où la « fabrication » effective du produit des décimaux, issue de différents contextes, est laissée à la charge de l'élève. Citons par exemple, les tâches sur l'agrandissement de figures, sur le calcul d'aire de rectangles, et sur le calcul de prix par l'utilisation de double graduation. Parmi ces publications, on ne trouve aucun manuel scolaire mais seulement des travaux de didacticiens des mathématiques, des brochures pédagogiques et des ouvrages destinés aux enseignants.

En première introduction de la multiplication des décimaux, différents auteurs proposent des situations qui portent sur trois grandeurs telles que les valeurs de la troisième s'obtiennent, sous certaines contraintes concernant les unités, en multipliant les valeurs des deux premières. Ces situations ont déjà été étudiées par les élèves avec des valeurs entières, on leur propose un travail analogue avec des valeurs décimales ou fractionnaires. La multiplication de valeurs entières de deux grandeurs se prolonge aux valeurs décimales de ces grandeurs, la légitimité de ce prolongement reste implicite. Ces activités ont aussi pour objectif d'enrichir le sens de la multiplication car elles ne reposent pas sur l'addition réitérée.

Les auteurs centrent leurs exposés sur ces activités d'apprentissage sans développer les réinvestissements des savoirs dans des situations variées, différentes ou non de celles qui sont à l'origine des connaissances. Cependant, ils soulignent leur importance dans l'enrichissement des notions en cours d'acquisition.

Nous commençons par les travaux des didacticiens qui proposent, en fait, une présentation complète de l'enseignement des décimaux mais nous limitons notre étude à la multiplication. Nous présentons, ensuite, des travaux de chercheurs italiens qui expérimentent un enseignement des mathématiques comprenant une phase contextualisée. Puis nous étudions les publications destinées aux enseignants, elles traitent de points plus particuliers qui reprennent parfois partiellement les travaux didactiques ou qui traitent des difficultés spécifiques d'enseignement.

31. Dans deux ingénieries didactiques de construction des décimaux

Guy Brousseau et Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin ont élaboré deux ingénieries didactiques de construction des décimaux à l'école et au collège. Parmi les travaux des chercheurs en didactique des mathématiques, les ingénieries sont les publications les plus accessibles aux professeurs. Si, comme l'expose Michèle Artigue [112], ce type de travaux consiste en une méthodologie de recherche en didactique des mathématiques, il comporte une partie destinée à la mise en œuvre de réalisations didactiques en classe que les enseignants peuvent tenter de s'approprier. Nous ne reviendrons pas ici sur les problèmes que peuvent poser ces tentatives et qui ont été étudiés notamment par Michèle Artigue [113].

La multiplication des décimaux chez G. Brousseau

Guy Brousseau [114] propose une ingénierie dans laquelle les décimaux sont des rationnels particuliers. La multiplication de décimaux est introduite dans deux situations d'agrandissement aujourd'hui classiques dans l'enseignement ou au moins dans la formation des enseignants : activités d'agrandissement de puzzles (×) puis activités avec un pantographe (××).

(×) La situation-problème

La première situation d'étude des applications linéaires proposée aux élèves est la suivante.

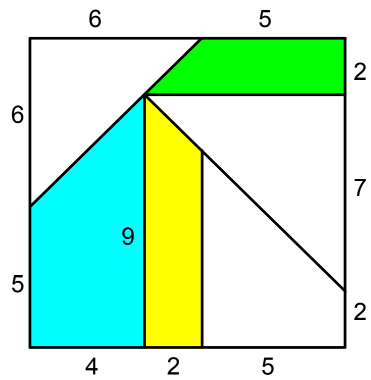


figure 7

[112] ARTIGUE M. (1988), Ingénierie didactique, *Recherches en didactique des mathématiques* 9/3 (281-308), Grenoble : La pensée sauvage.

[113] ARTIGUE M. (1984), *Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques.* Thèse, Université de Paris 7.

ARTIGUE M. (1986), Etude de la dynamique d'une situation de classe : une approche de la reproductibilité, *Recherches en didactique des mathématiques 7/1 (5-62)*, Grenoble : La pensée sauvage.

[114] BROUSSEAU G. (1998), Problèmes de didactique des décimaux, *in Théorie des situations didactiques (201*-289), Grenoble : La pensée sauvage. [pp. 237-241].

Version révisée et augmentée d'une première édition en 1981 in *Recherches en didactique des mathématiques 2/1 (37-127)*, Grenoble : La pensée sauvage.

> Consigne :
>
> « Voici des puzzles (Exemple Tan–gram, figure 7) vous allez en fabriquer de semblables, plus grands que les modèles, en respectant la règle suivante : le segment qui mesure quatre centimètres sur le modèle devra mesurer sept centimètres sur votre reproduction. Je donne un puzzle par équipe de 5 ou 6, mais chaque élève fait au moins une pièce ou un groupe de 2 en fait 2. Lorsque vous aurez fini, vous devez pouvoir reconstituer les mêmes figures qu'avec le modèle. »
>
> (××) Dans la séance d'introduction, les élèves apprennent du maître, banalement, comment se servir de l'appareil : la ventouse ne doit pas bouger, ni le papier, la pointe suit le modèle, le crayon dessine l'image... Ils s'essayent à agrandir et à rapetisser des dessins personnels puis mettent en commun leurs observations et leurs hypothèses :
>
> - on peut « agrandir » ou « rapetisser » en échangeant la pointe et le crayon ;
> - l'image ne change pas de forme quelle que soit la manière dont on dispose le pantographe ; (...)
>
> Le maître annonce aux élèves que dans un moment il choisira une longueur entre 1 et 15 cm : chaque élève ou groupe de deux devra prévoir la longueur correspondante transformée par son pantographe. Cette prévision fera l'objet d'un pari, puis d'une épreuve : on vérifiera avec l'appareil si la valeur annoncée est exacte. En attendant ce moment, les élèves peuvent s'entraîner à prévoir : ils cherchent les images de quelques nombres et vérifient. Ils peuvent venir parier dès qu'ils pensent avoir découvert la loi et s'en sentent assez sûrs.

La première situation, indispensable selon l'auteur, permet de construire le modèle multiplicatif de la situation d'agrandissement : l'addition n'est pas la seule opération qui agrandit les nombres [115].

> Avec peu de modifications, cette situation du pantographe pourrait être prise comme situation initiale dans l'étude des applications linéaires. Mais alors les hypothèses que font les élèves pour interpréter les agrandissements du puzzle avec de simples translations ($x \to x + a$) seraient envisagées moins sérieusement. Elles seraient rejetées presque sans examen, puisque l'appareil fournirait la bonne image. Au lieu de construire le modèle et de prévoir le résultat satisfaisant les conditions voulues, il suffirait de le découvrir comme une loi de la nature. Or le modèle additif est un obstacle résistant à la mise en place du modèle multiplicatif et doit pouvoir lui être opposé dans des situations ouvertes, ce choix devant se faire sur des critères rationnels et intellectuels.

La seconde activité permet d'utiliser la multiplication pour enrichir le sens de l'opération : la composition de deux agrandissements de coefficients quelconques (entiers mais aussi rationnels ou décimaux) engendre un agrandissement dont le coefficient est le produit des coefficients des deux agrandissements composés. Cet enrichissement permet à l'élève de tenir le raisonnement analogue à celui–ci : les agrandissements successifs par les pantographes [* 2,5] et [* 1,25] donnent un seul

115 *Ibid.* [p. 227].

agrandissement dont le coefficient est 2,5 * 1,5 et dont la valeur 3,75 peut être déterminée par des calculs sur des longueurs particulières. Cet enrichissement n'est pas immédiat, il est le fruit d'un véritable travail mathématique. Guy Brousseau insiste sur la nécessité de ce travail [116] :

> Une pratique comparable, courante, dans l'enseignement élémentaire, consiste pour le maître à « exploiter » le genre de situations didactiques présenté plus haut, en institutionnalisant immédiatement la découverte d'un élève : « Vous avez découvert tel objet (affirmation implicite du fait qu'il a un caractère général) ; il s'appelle « composé de deux applications » (sous-entendu il a un statut cognitif et culturel, reconnaissez-le, utilisez-le, dans les exercices suivants...) ».
>
> Cette pratique court-circuite tout le travail mathématique et même le nie ; elle revient à affirmer implicitement qu'il suffisait d'y penser pour transformer un concept mathématique.

On distingue dans ces activités, au sens de Gérard Vergnaud [117], deux types de multiplication dans le cas d'un seul espace de mesure : la multiplication de la longueur d'un côté par le coefficient du pantographe (multiplication d'une mesure par un opérateur scalaire pour obtenir la mesure correspondante) et la multiplication de deux coefficients dans le cas de deux utilisations successives du pantographe (multiplication de deux opérateurs scalaire pour obtenir l'opérateur composé). Dans les deux cas, la multiplication est envisagée dans une situation où le passage des nombres entiers aux nombres décimaux ne se heurte pas à une rupture du sens de l'opération.

La multiplication des décimaux chez R. Douady & M.-J. Perrin

Dans la progression proposée par Régine Douady et Marie-Jeanne Perrin [118], la multiplication de deux entiers a deux sens différents suivant que l'un des deux est une mesure et l'autre un nombre sans dimensions ou que les deux nombres sont des mesures. Les calculs du périmètre d'un carré ou de l'aire d'un rectangle illustrent et donnent du sens à ces deux situations. Les décimaux y sont abordés comme des rationnels particuliers, la multiplication de deux décimaux est construite par les élèves dans une situation de calcul d'aire de rectangle.

> Il s'agit dans ce chapitre d'utiliser le cadre géométrique pour faire avancer les connaissances sur les nombres : c'est en calculant la mesure de l'aire de rectangles qu'on donnera du sens au produit de fractions, et les fractions décimales seront privilégiées pour approcher la mesure du côté d'un carré dont l'aire est donnée. (...)
>
> Si les deux dimensions sont fractionnaires, le rectangle est coupé en 4 parties dont on sait calculer l'aire pour 3 d'entre elles. On peut déterminer l'aire de la 4ème partie par référence au pavage. Et l'aire du

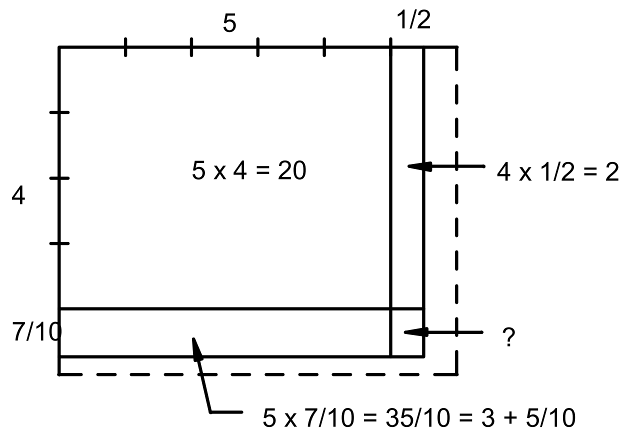
[116] *Ibid.* [pp. 234].

[117] VERGNAUD G. (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité,* Berne : Peter Lang. [pp. 161 et suiv.].

[118] DOUADY R. & PERRIN M.-J. (1986), *Liaison Ecole-Collège : Nombres décimaux,* brochure n°62, PARIS : IREM de Paris 7.

rectangle est la somme des aires des quatre parties. Finalement la connaissance des dimensions détermine l'aire du rectangle. Par convention, le produit de 2 nombres fractionnaires *a* et *b* est la mesure de l'aire du rectangle de dimensions (*a*, *b*) en prenant des unités de longueur et d'aire adaptées.

Exemple : $a = 4 + \frac{7}{10}$ $\quad b = 5 + \frac{1}{2}$



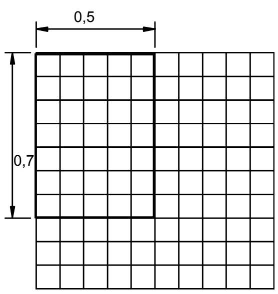
$$(4+\frac{7}{10})*(5+\frac{1}{2}) \qquad = 4*5 + (4*\frac{1}{2}) + (5*\frac{7}{10}) + (\frac{7}{10}*\frac{1}{2})$$
$$= 20 + 2 + 3 + \frac{5}{10} + (\frac{7}{10}*\frac{1}{2})$$

Il reste à calculer l'aire du rectangle R de dimension $\frac{7}{10}$u et $\frac{1}{2}$u. On le reporte dans le carré unité. (...) Finalement la mesure de l'aire cherchée est :

$$(4+\frac{7}{10})*(5+\frac{1}{2}) = 20+2+3+\frac{5}{10}+\frac{7}{20} = 25+\frac{10}{20}+\frac{7}{20} = 25+\frac{17}{20}.$$

(...) L'activité présentée ici est l'occasion de donner du sens à la fois à cette multiplication et au calcul de l'aire d'un rectangle en fonction de ses dimensions dans le cas où les mesures ne sont pas entières.

Remarque : Avec des nombres décimaux on aurait le même travail.



Par exemple 0,5 * 0,7 = 0,35 : on a besoin de 100 carrés de dimension 0,1u pour paver le carré de dimension 1u. L'aire du carré de dimension 0,1u est donc 0,01C, il en faut 35 pour paver le rectangle de dimensions (0,5u ; 0,7u) donc 0,5 * 0,7 = 0,35.

Comme dans l'ingénierie de Guy Brousseau, la connaissance nouvelle est issue, dans une situation multiplicative connue, d'un problème posé par l'introduction de valeurs décimales. Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin insistent, elles aussi, sur la nécessité d'un travail mathématique ainsi que sur l'importance du réinvestissement des nouvelles connaissances dans différentes situations.

> Au fur et à mesure que de nouvelles fractions apparaissent, on les fait intervenir dans des situations différentes de celles où elles ont été créées. De cette manière les fractions vont pouvoir être décontextualisées et prendre le statut de nombre. De plus de nouvelles situations vont permettre aux élèves de produire de nouvelles écritures, qu'on pourra à leur tour utiliser dans de nouveaux problèmes. C'est ainsi que le stock des nombres s'agrandit. Il s'agit d'utiliser les écritures fractionnaires pour traiter des relations de proportionnalité entre des quantités continues.
>
> (...) Nous ne détaillerons pas ici ces situations de proportionnalité. En voici quelques exemples :
>
> - prix payé pour des marchandises en fonction de la masse,
> - consommation d'essence en fonction de la distance parcourue,
> - distance parcourue en fonction du temps dans un mouvement uniforme.

Remarquons que dans cette ingénierie comme dans celle de Guy Brousseau, la multiplication est envisagée dans une situation où le passage des nombres entiers aux nombres décimaux ne se heurte pas à une rupture du sens de l'opération.

<u>Quelle multiplication dans ces deux ingénieries didactiques des décimaux ?</u>

Dans ces deux ingénieries, les nombres décimaux sont introduits comme des rationnels particuliers. Ce choix de définition a pour conséquence une diversité de l'écriture des décimaux absente des ouvrages que nous avions étudiés : écriture fractionnaire quelconque (la fraction irréductible associée a pour dénominateur le produit d'une puissance de 2 et d'une puissance de 5), écriture fractionnaire décimale (le dénominateur de la fraction est une puissance de 10) ou écriture décimale (certains auteurs disent aussi écriture virgulée mais nous pensons que cette dénomination entraîne des confusions pour les nombres entiers). Dans l'enseignement de la multiplication des décimaux, les différentes écritures entraînent des traitements différents dans les procédures de calculs.

Dans l'ingénierie de Guy Brousseau, les coefficients des agrandissements ou des réductions sont des rationnels, quotients de deux longueurs entières, le calcul effectif du produit des coefficients est ramené au calcul du coefficient de l'agrandissement composé.

Dans l'ingénierie de Régine Douady & Marie–Jeanne Perrin, les nombres qui mesurent les côtés des rectangles sont des rationnels construits à partir de partages et de reports de l'unité de longueur. Le calcul effectif du produit de deux décimaux en écriture fractionnaire décimale permet de tisser un lien avec la technique usuelle. Ce lien apparaît dans l'extrait cité, il montre qu'en multipliant un nombre de dixièmes par un nombre de dixièmes, on obtient un nombre de centièmes. Un travail spécifique est proposé pour passer de ces procédures « artisanales » à la technique usuelle.

Dans les deux ingénieries, la multiplication des décimaux est construite en continuité avec celle des entiers. Cette continuité est assurée par le choix d'une situation où l'addition réitérée n'est pas une bonne représentation de la multiplication : l'application puis la composition d'opérateurs d'agrandissements sur des mesures pour Guy Brousseau et le calcul de l'aire de rectangles pour Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin. Ce choix évite aux auteurs (et c'était certainement là un de leurs objectifs) de ramener le décimal à un nombre entier par un changement d'unité.

Les nombres considérés dans les deux ingénieries sont de natures différentes, nous distinguons, dans notre étude, les nombres-mesures (rattachés à une unité), les nombres-scalaires (sans unité mais qui opèrent sur des mesures, par exemple le coefficient d'un agrandissement est un scalaire) et les nombres-abstraits (sans unité ni lien avec des mesures, par exemple les nombres des exercices de technique opératoire sont des nombres abstraits).

Dans les situations multiplicatives envisagées par Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin, les nombres sont des nombres-mesures, si bien qu'il peut être difficile d'éviter que la longueur 0,5 u ne soit aussi considérée comme 5 v avec $v = \frac{u}{10}$. Cette difficulté n'apparaît pas dans la situation de Guy Brousseau, les nombres-scalaires n'ayant pas d'unité. Ce choix est important pour cet auteur, comme nous l'avons déjà souligné [119]

> Le décimal fonctionne comme un entier et n'est plus détachable d'une unité : l'objet n'est pas le décimal, mais la grandeur physique. L'élève ne peut alors interpréter le produit de deux décimaux que dans le cas par exemple du produit de deux longueurs, ce qui le ramène aux obstacles bien connus des nombres concrets : il aura du mal à concevoir $a^2 - a$ et traînera implicitement des équations aux dimensions.

Les passages entre nombres-scalaires et nombres-abstraits sont plus faciles qu'entre nombres-mesures et nombres-abstraits du fait même de l'absence d'unité lors de la composition de deux opérateurs. Nous avons d'ailleurs pu le constater lors d'une expérience d'enseignement de la multiplication de radicaux en classe de troisième [120].

Etudions maintenant comment Jeanne Bolon, dans sa recherche sur l'impact des recherches en didactique des mathématiques sur l'enseignement des nombres décimaux [121], envisage leur multiplication.

---

[119] BROUSSEAU G. (1998), Obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique, *in Théorie des situations didactiques (115-160),* Grenoble : La pensée sauvage. [p. 131].

[120] RODITI E (1996), *La racine carrée en troisième, étude d'une activité,* cahier didirem n°17, Paris : IREM de Paris 7.

[121] BOLON J. (1996), *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière Ecole-Collège,* Paris : Thèse de didactique des mathématiques de l'Université de Paris 5.

32. La multiplication des décimaux dans la thèse de Jeanne Bolon

Dans sa thèse, Jeanne Bolon propose une série de douze *suggestions* progressives sous forme de fiches d'activités commentées. Nous distinguons cette progression des deux ingénieries précédentes car la thèse ne présente pas d'évaluation de ces suggestions (fondée sur la comparaison d'une analyse *a priori* et d'une analyse *a posteriori*).

Son objectif était plutôt d'évaluer le parti que les enseignants qui ont participé à son travail de recherche ont tiré de ces suggestions inspirées par les travaux de didactique des mathématiques. Ces suggestions ne sont pas directement utilisables, les objectifs et la trame des activités sont présentés, l'enseignant doit inscrire ces activités dans un déroulement de l'enseignement segmenté en séquences et dans une organisation de la classe, il lui reste encore à élaborer différentes phases du travail : institutionnalisations, applications, évaluations...

L'ensemble de ce travail très riche concerne l'enseignement des décimaux à l'école primaire (CM2) et au collège (6e). Nous y avons relevé les activités qui concernent implicitement ou explicitement la multiplication des décimaux.

Ordre de grandeur du produit de deux décimaux

Dans la suggestion 1 qui concerne le calcul approché sur les entiers et les décimaux, l'auteur propose des tâches où les élèves doivent choisir, parmi une liste de nombres, celui qui est le plus proche d'un produit donné. Par exemple :

38 * 109 qui doit être associé à 4 038 parmi 234, 5 002, 4 038, 512 et 84 ;

45,92 * 0,2 qui doit être associé à 10 parmi 90, 10 et 30.

Il est difficile, à la lecture de la suggestion, de savoir quelles procédures les élèves sont censés mobiliser à ce niveau. En référence aux programmes, les élèves peuvent engager les procédures suivantes :

- utiliser des approximations de 38 et 109 par excès (40 et 110) et en déduire 38 * 109 $\approx$ 4 400 ; utiliser ensuite une approximation de 109 par défaut (100) et en déduire 38 * 109 $\approx$ 38 * 100 $\approx$ 3 800. D'où le choix de 4 038 ;
- approcher 45,92 par 50. Ainsi 45,92 * 0,2 $\approx$ 50 * 0,2 et on obtient 45,92 * 0,2 $\approx$ 10 en calculant 50 * 0,2.

Il n'est pas facile, à ce niveau de la progression proposée par les suggestions, de comprendre comment l'élève effectue 50 * 0,2. Il semble que la multiplication d'un entier par un décimal est, comme dans les manuels de CM2, un des prérequis de la progression proposée.

Nous remarquons la volonté implicite « d'intégration» de nouveaux nombres qui émerge de cette activité : les procédures mises en œuvre pour les nombres entiers sont analogues à celles qui concernent les décimaux ; les nombres changent mais l'opération, elle, ne change pas. L'ordre de grandeur est un moyen de la mise en œuvre de cette intégration.

De la multiplication des entiers à celle des décimaux

La suggestion 2 concerne les grandeurs familières. Dans ce contexte, l'auteur pose le problème de l'interprétation des résultats affichés par la calculatrice. Une situation porte sur les trois grandeurs : masse, prix au kg, prix. Les nombres décimaux sont écrits en respectant le format social qui correspond à l'unité : les francs sont écrits avec deux décimales, ce qui permet de lire 5,80 F comme 5 F 80 c, les masses sont écrites avec trois décimales, ce qui permet de lire 0,620 kg comme 0 kg 620 g. La situation montre que les balances du commerce n'indiquent pas le produit de la masse par le prix au kg, que l'élève peut déterminer à la calculatrice et que Jeanne Bolon appelle le « vrai » nombre. Elles indiquent son arrondi à cinq centimes près. A cette étape de la progression proposée, les élèves ne sont pas censés savoir calculer le produit de deux décimaux, ils doivent l'effectuer à la calculatrice.

La pertinence de ce prolongement du produit des grandeurs au cas où les valeurs sont décimales est admise mais elle est questionnée par la situation, et cela nous semble être un objectif pédagogique de l'auteur : ce questionnement permet de soulever un problème contribuant à enrichir le sens de l'écriture des nombres décimaux ainsi que celui de la multiplication.

La multiplication ne conserve pas le format social des nombres

Le même énoncé de la suggestion 2 pose aussi le problème de l'écriture d'un résultat soumise à un format social : le produit de la masse en kg par le prix au kg donne la « vraie » valeur du prix qui n'est pas celle que la balance affiche.

Au-delà de la constatation de la perte du format social des nombres, un travail est suggéré au professeur qui peut être entrepris en classe pour faire comprendre le sens des décimales affichées par la calculatrice. Par exemple, dans l'étude de la ligne d'un ticket de caisse de poissonnier [122]

Maquereau
0,550 kg 29,90 F/kg 16,45F

la calculatrice affiche 16,445 pour le produit 0,550 * 29,90. Des procédures personnelles peuvent conduire à ce résultat : 1 kg coûte 29,90 F donc 100g coûtent 2,99 F. Ainsi 500 g coûtent 2,99 F * 5 = 14,95 F. 50 g coûtent la moitié de 2,99 F. Or 2,99 F = 299 c, $299 \div 2 = (298 + 1) \div 2 = 199 + \frac{1}{2}$, cela permet d'interpréter le demi-centime qui apparaît dans le résultat de la multiplication ainsi que le demi-centime supplémentaire qui est demandé à l'acheteur par la pratique de l'arrondi.

La multiplication n'est pas qu'une addition répétée

Dans la suggestion 7, Jeanne Bolon propose une série d'activités de production d'énoncés de problèmes où l'on devrait effectuer certaines multiplications et certaines divisions. Les multiplications proposées sont :

$$13 * 9 \qquad 13 * 1058 \qquad \frac{14}{6} * \frac{9}{13} \qquad 13 * 10{,}58 \qquad 0{,}13 * 10{,}58$$

[122] *Ibid.* [p. 221].

Les énoncés sont affichés puis les problèmes qui se ressemblent sont regroupés. L'auteur rappelle au professeur, dans un langage courant, une classification des problèmes multiplicatifs inspirée de celle de Gérard Vergnaud [123] : transformation par un opérateur linéaire, composition de deux transformations par des opérateurs linéaires, composition de deux grandeurs, comparaison de deux grandeurs homologues, conversion d'unité.

L'ambition de l'auteur est affichée au début de la suggestion [124].

> Les sens de la multiplication se sont enrichis depuis l'addition répétée du cours élémentaire. Mettre de l'ordre dans les différents types de problèmes est le but des activités suivantes.

On retrouve ici la préoccupation déjà citée et partagée par tous les auteurs : prolonger la multiplication des entiers aux décimaux en reprenant les situations multiplicatives qui mettent en jeu des grandeurs qui avaient des valeurs entières et en leur attribuant des valeurs décimales. Dans cette suggestion plus que dans la précédente, le prolongement est implicite.

Multiplication/division par 10, 100 ou 1000 et changements d'unités

La suggestion 9 porte sur les grandeurs et unités conventionnelles, principalement celles de longueur, d'aire, de volume et de masse. Elle fait suite à une série d'activités où les élèves manipulent ces grandeurs, procèdent à différents partages et à l'expression des mesures des grandeurs par un couple nombre / unité. Ils ont constaté, en changeant les unités de référence, que plus l'unité est grande, plus le nombre qui exprime la mesure est petit.

La suggestion 9 reprend ces activités avec les unités conventionnelles, le premier objectif est d'installer quelques repères physiques sur les unités usuelles. Le deuxième objectif est de comparer les unités et les sous-unités usuelles. Ici encore, l'auteur propose de recourir à des manipulations matérielles [125]

> Il est très important de faire voir aux enfants 1 cm^3, 1 dm^3, 1 m^3, fait avec des armatures (baguettes de bois). Il est alors impossible de dire que 10 cm^3 = 1 dm^3. On voit tout de suite que c'est faux.

Nous émettons une réserve toutefois, cette manipulation n'est pas suffisante pour régler tous les problèmes liés aux conversions d'unités et rendre *impossible* l'écriture : V = 12 dm^3 = 1,2 m^3.

D'autres activités traitent des changements d'unité usuelle de longueur et de masse, toujours à partir de manipulation effective des élèves. L'auteur dresse le bilan de ces séances [126] :

---

[123] VERGNAUD G. (1981), *Op. cit.* [pp. 161 et suiv.].

[124] BOLON J. (1996), *Op. cit.* [p. 236].

[125] *Ibid.* [p. 239].

[126] *Ibid.* [p. 240].

> Quand on mesure un objet avec deux unités, on trouve deux nombres pour le mesurer ; le nombre le plus grand est celui qui correspond à l'unité la plus petite.
>
> On peut représenter par un schéma ou par un calcul :

/ 10

345 km = 3 450 hm

* 10

345 km = 3 450 hm
1 km = 10 hm
345 * 10 hm = 3 450 hm

* 100

345 dam = 3,45 km

/ 100

345 dam = 3,45 km
1 dam = 1/100 km
345 * 1/100 km = 3,45 km

On retrouve, et c'est la première fois depuis notre étude du manuel d'arithmétique de 1947, les multiplications et divisions par 10, 100 et 1000 directement liées aux changements d'unité : 3,4 est un nombre qui mesure un segment en cm, il signifie la même longueur que 34 mm. Mais cet éclairage n'est pas celui qui domine dans les suggestions de Jeanne Bolon, elle ne l'utilise pas, par exemple, pour la multiplication des décimaux. Sans doute pour éviter d'enfermer l'élève dans une représentation du nombre décimal qui, selon Guy Brousseau que nous avons déjà cité à ce sujet, le conduit à commettre des erreurs.

Multiplication et agrandissement

Dans la suggestion 10, l'auteur reprend des activités analogues à celle du puzzle de Guy Brousseau en choisissant des mesures entières ou décimales. Nous ne détaillerons donc pas l'analyse.

Dans la suggestion 11, l'auteur reprend les premières étapes de l'activité avec le pantographe de Guy Brousseau où des dessins de maisons sont agrandis ou réduits. L'objectif de Jeanne Bolon n'est pas de passer d'un agrandissement à deux agrandissements pour multiplier les coefficients. Il est d'utiliser les imprécisions pour, sans aborder une quelconque théorie de l'approximation, amener les élèves à distinguer les valeurs obtenues par mesure directe (VMD), les valeurs obtenues par un calcul sur des VMD, et les valeurs obtenues par un calcul sur des résultats de calculs qui ont pu être arrondis.

Dans cette activité le professeur annonce que l'agrandissement de la maison correspond à la multiplication de ses longueurs par 1,5. La hauteur de la porte mesure 3 cm, sa largeur 1,7 cm... Les procédures attendues par l'auteur sont [127]

> - Utiliser un opérateur additif.
> - Partir des nombres entiers, prendre le nombre et ajouter sa moitié ou passer par l'image de 1.
> - Partir d'une mesure décimale, convertir en millimètres, passer par l'image de 1.

[127] *Ibid.* [p. 245].

- Partir d'une mesure décimale, convertir en dixièmes, calculer l'image d'un dixième.
- Pour des élèves de niveau plus élevé, utiliser le multiplicateur fractionnaire.

Remarquons que l'auteur n'envisage pas que les élèves multiplient directement deux nombres en écriture décimale.

Multiplication, aire et périmètre de rectangles

La suggestion 12 qui est la dernière de la progression, reprend le travail de Régine Douady & Marie–Jeanne Perrin. Le calcul d'aire porte sur des rectangles dont les dimensions ne sont pas écrites sous forme décimale mais sous la forme d'une somme d'un entier et d'une fraction : $3+\frac{1}{2}$, $2+\frac{3}{4}$, $4+\frac{6}{10}$. Pour déterminer le produit de deux fractions l'auteur envisage des procédures de pavages ou le recours aux nombres en écriture décimale et le calcul à la main ou à la calculatrice.

Il semblerait donc que la compétence calculatoire sur les décimaux soit envisagée comme pouvant être acquise ou non à ce dernier niveau de la progression. L'enseignement de la technique opératoire n'est pas explicité.

Quelle multiplication des décimaux dans les suggestions de Jeanne Bolon ?

La multiplication des décimaux est pratiquement omniprésente dans les suggestions qui figurent dans la thèse de Jeanne Bolon. La multiplication est implicitement présente dans les écritures des nombres décimaux ainsi que dans les changements d'unité. Nous pouvons distinguer deux types de situations : celles qui mettent en avant les ruptures de sens entre la multiplication des décimaux et la multiplication des entiers et celles qui assurent une continuité de sens avec un « écrasement » des nombres par l'opération. Les situations–ruptures sont très minoritaires, la seule rupture qui soit vraiment soulevée est celle de la non–conservation du format social des nombres. Les autres situations assurent plutôt une continuité de sens : associer l'opération à des problèmes indépendamment des nombres, prolonger les situations multiplicatives sur des entiers à des décimaux, utiliser les ordres de grandeurs ou des approximations pour approcher un produit. Les modèles multiplicatifs utilisés qui permettent le prolongement de l'opération des entiers aux décimaux sans rupture de sens, sont ceux que nous avons repérés dans les deux ingénieries didactiques : l'agrandissement ou la réduction de figures sans déformation et le calcul d'aire de rectangles.

L'analyse détaillée que nous venons de terminer de ces suggestions montre en outre que l'auteur ne prend pas en charge explicitement l'enseignement de la technique de la multiplication de deux décimaux. Sans doute pouvons–nous avancer que l'auteur cherche à privilégier la construction du sens de cette opération plutôt que le côté technique. Comment tisser un lien entre sens et technique ? L'auteur laisse la réponse à la charge du professeur.

33. Une expérience d'enseignement comprenant une phase contextualisée

Bien qu'il soit peu probable que les enseignants français construisent leurs projets d'enseignement de la multiplication des nombres décimaux en référence à des recherches en cours en Italie, nous voudrions mentionner une expérience de chercheurs italiens dont les résultats ont été publiés en septembre 1996.

Plusieurs chercheurs italiens mènent des travaux sur des projets d'enseignement à long terme où le savoir mathématique est contextualisé en dehors du domaine mathématique : en économie, en technologie, en astronomie... De tels projets d'enseignement reposent sur des hypothèses de construction des connaissances à travers la contextualisation du savoir mathématique [128] : la « *motivation* » de l'élève est d'autant plus grande que le problème l'intéresse, le rapport avec des « *pratiques extra-scolaires familières à l'enfant* » lui permet de recourir au sens de la situation pour effectuer sa tâche et pour contrôler cette effectuation, la rencontre avec les objets et les pratiques sociales liés au « *domaine d'expérience* » réalise une médiation avec le savoir incorporé dans ces objets et dans ces pratiques sociales, la mise en place de stratégie de résolution de problèmes contextualisés participe à la construction de schèmes, les activités de résolution de problèmes liés au « *domaine d'expérience* » mobilisent « *naturellement* » des opérations mentales multiples et coordonnées.

Milena Basso & Cinzia Bonotto [129] ont réalisé une expérience d'enseignement de la multiplication des décimaux et de la proportionnalité en introduisant des tickets de caisse de supermarchés, de primeurs, de bouchers... dans le contexte scolaire. L'expérience rejoint les travaux du *Nucleo di Padova* sur les problèmes de l'enseignement des nombres rationnels à l'école élémentaire. Cette expérience d'enseignement s'est déroulée durant une année scolaire à raison de deux heures hebdomadaires. Les auteurs ont montré que ces tickets de caisse matérialisaient un moyen de médiation entre le savoir contextualisé d'une réalité extrascolaire et le savoir mathématique, qu'ils étaient un instrument de médiation entre les élèves et le savoir. Les auteurs schématisent ainsi la situation :

savoir mathématique

↕

élèves ⟷ tickets de caisse ⟷ enseignant

↕

réalité extrascolaire

---

[128] BOERO P. (1994), Situations didactiques et problèmes d'apprentissage : convergence et divergence dans les perspectives de recherche, *in Vingt ans de didactique des mathématiques (17-50)*, Grenoble : La pensée sauvage.

[129] BASSO M. & BONOTTO C (1996), Un'esperienza didattica di integrazione tra realtà extrascolastica e realtà scolastica riguardo ai numeri decimali, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate vol. 19A N. 5 (424-449)*, Paderno del Grappa TV. : Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin.

D'après les auteurs, cette situation a généré des questionnements et des raisonnements, elle a favorisé des contrôles, elle a permis d'accéder à des savoirs mathématiques (contextualisés, décontextualisés puis institutionnalisés) autour de plusieurs activités : lecture « fonctionnelle » des données inscrites sur les tickets, approximation d'une donnée, recherche de la valeur d'une donnée manquante (effacée par l'enseignant), mise en relation des grandeurs numériques (émergence du concept de proportionnalité), recherche d'algorithmes pour multiplier et diviser avec des nombres décimaux.

Cette expérience qui relate des résolutions de problèmes dont les énoncés sont analogues à ceux qui figurent dans les manuels français pour la classe de sixième, montre que des apprentissages mathématiques peuvent être construits à partir de problèmes posés dans le contexte extrascolaire et qu'ils permettent de les résoudre. L'enseignement qui émerge des manuels français suit un chemin inverse : le savoir mathématique est enseigné à travers des activités du contexte scolaire, il est appliqué pour la résolution de problèmes posés par des situations extra-scolaires auxquelles les élèves ne sont pas nécessairement familiarisés.

Si les enseignants sont peu familiers des productions de la didactique des mathématiques dont les publications sont rédigées à l'attention des chercheurs, certains professeurs consultent des publications qui leur sont adressées. Nous allons maintenant étudier les propositions qui y figurent pour enseigner la multiplication des décimaux.

34. La multiplication des décimaux dans les publications pour les enseignants

Les auteurs des manuels proposent un enseignement très décontextualisé pour privilégier la technique opératoire. Les situations multiplicatives ne sont pas exploitées pour introduire la multiplication ou pour déterminer le produit de deux décimaux. Au mieux, elles sont utilisées dans des problèmes de réinvestissement. A l'opposé, les enseignements élaborés par les didacticiens sont très riches en tâches qui permettent à la fois un prolongement de la multiplication des entiers à celle des décimaux, et une élaboration de procédures variées pour obtenir le produit de deux décimaux. Nous savons, d'après une enquête de la DEP [130] déjà mentionnée, que les professeurs utilisent les manuels principalement pour y choisir des exercices d'entraînement, un tiers d'entre eux utilisent d'autres sources pour préparer leurs cours. Les publications pour les enseignants constituent - elles un relais entre la recherche en didactique et les professeurs ? Répondent - elles aux problèmes d'enseignement laissés en suspens dans les recherches ? Présentent - elles les activités préparatoires contextualisées qui font défaut dans les manuels ?

Comment ces publications s'adressent-elles aux enseignants ?

Nous avons consulté les publications à l'intention des enseignants. Trois d'entre elles abordent la multiplication des décimaux. Ce sont par ordre

[130] Direction de l'Evaluation et de la Prospective (1997), *Pratiques pédagogiques de l'enseignement des mathématiques en sixième et progrès des élèves,* Paris : Ministère de l'Education nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche.

chronologique d'édition[131] : *Aides pédagogiques pour le cycle moyen, Nombres décimaux* (1986), *Apprentissages mathématiques en 6e* (1991) et *Travaux numériques 6e* (1998). Leurs conceptions sont très différentes. Après les avoir brièvement présentés, nous les comparerons suivant les critères déjà utilisés : dans quelles situations s'inscrivent les activités de construction de la multiplication des décimaux et quelle continuité est établie avec la multiplication des entiers ? Comment est pris en charge le passage des procédures personnelles à la technique usuelle ? Comment passe-t-on des situations multiplicatives de découvertes aux autres situations et comment dans ce passage sont traitées les ruptures de sens de la multiplication ?

Aides pédagogiques a été rédigé par des membres de différents IREM. Il propose une cinquantaine de pages pour éclairer l'enseignement des décimaux en évoquant les avantages et les inconvénients des différentes présentations classiques puis une centaine de pages où sont développées quatre présentations réalisées en classe. Un extrait d'article de Guy Brousseau et une « bibliographie sommaire » terminent cet ouvrage. Sa présentation et son style sont proches de ceux d'un recueil d'articles didactiques regroupés autour d'un thème commun.

Apprentissages mathématiques est un prolongement pour la classe de sixième des ERMEL bien connus à l'école élémentaire. Il a été mis au point par une équipe regroupant des chercheurs de l'INRP, des professeurs d'IUFM, des professeurs de collège et une institutrice. Sa conception est assez proche de celle d'un livre du maître : buts et objectifs déclarés et argumentés, scénarios d'activités commentés, organisation matérielle du déroulement précisée... Néanmoins sa structure n'est pas caractéristique de celle des livres du maître où les chapitres sont plus nombreux, analogues à ceux qu'on trouve dans un manuel pour la classe. Les auteurs recourent à de nombreux schémas, les développements théoriques sont assez denses et le langage utilisé recourt à du vocabulaire et à des concepts didactiques tout en restant assez proche du langage courant.

Cet ouvrage propose deux progressions, une en calcul et une en géométrie qui couvrent une partie importante du programme de la classe de sixième. La progression consacrée au calcul débute par deux situations de « révision » de la multiplication qui figurait, à l'époque de la publication, au programme de l'école élémentaire. L'objectif de ces révisions est de revenir sur des conceptions sources d'erreurs bien connues des enseignants.

Travaux numériques est un ouvrage rédigé par deux professeurs de collège. Sa conception est très proche de celle d'un livre du maître, les titres des chapitres reprennent ceux des manuels de sixième. Chaque chapitre présente des objectifs pédagogiques en référence à des résultats de recherches et aux évolutions des programmes. Des indications concernent le rôle du professeur. Les activités sont présentées et commentées : objectif, présentation, matériel, consignes,

[131] APMEP (1986), *Aides pédagogiques pour le cycle moyen, Nombres décimaux*, Paris.
PRESSIAT A. (1991), *Apprentissages mathématiques en 6e,* Paris : Hatier/INRP.
DUPÉ C. & HILLION M. (1998), *Travaux numériques 6e*, Paris : Nathan Pédagogie.

déroulement... elles se terminent par « L'essentiel » qui résume l'intérêt de l'activité.

Les auteurs s'adressent à des collègues. Le professeur–lecteur est parfois confondu avec l'auteur–professeur comme nous le soulignons dans les citations suivantes [132] :

> *Notre* rôle consiste donc à *nous* inscrire dans le développement de ce processus engagé depuis le cours préparatoire.
>
> (...) les évaluations de début de 6e, même si elles montrent que *nos* élèves ont des acquis...

Les concepts issus des recherches en didactique des mathématiques y sont utilisés modérément.

Quelles situations pour enseigner la multiplication des décimaux ?

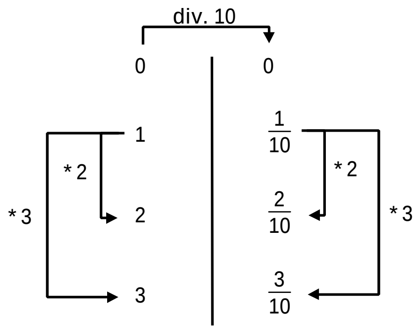
Parmi les quatre propositions qui figurent dans *Aides pédagogiques*, trois traitent de la multiplication des décimaux. Deux d'entre elles considèrent le nombre décimal comme un rationnel particulier et la multiplication des décimaux est considérée comme un cas particulier de la multiplication des rationnels. Elle est présentée par le calcul d'aire de rectangles à l'aide de pavages rectangulaires comme dans l'ingénierie de Régine Douady & Marie–Jeanne Perrin. Une proposition analogue figure dans *Travaux numériques*.

Une situation plus formelle qui met en jeu des opérateurs et qui repose implicitement sur les propriétés des fonctions linéaires, est décrite dans *Aides pédagogiques* [133]. Les décimaux restent, à ce niveau de l'exposé, écrits sous forme fractionnaire décimale avec la convention d'écriture $\frac{n}{10} = n \div 10$.

> 1) En utilisant la fonction « diviser par 10 », on peut introduire les nombres décimaux, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$,... $\frac{27}{10}$, les comparer, les additionner et les multiplier par un naturel. (...)
>
> 2) Si on compose la fonction « diviser par 10 » avec elle–même, on se trouve confronté à la recherche de l'image des nombres $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$,... (...)
>
> Une réponse peut être apportée en remarquant que « div. 10 » suivie de « div. 10 » est équivalente à « div. 100 ». (...)
>
> 3) A l'aide des fonctions réciproques « multiplier par 10 »,... il est facile d'observer que $\frac{11}{100} * 10 = \frac{11}{10}$. (...)
>
> 4) Les propriétés de la fonction « div. 10 » nous permettent d'établir le tableau suivant :

[132] DUPÉ C. & HILLION M. (1998), *Op. cit.* [pp. 47–48].

[133] APMEP (1986), *Op. cit.* [pp. 158–161].



Ainsi $\frac{1}{10} * n = \frac{n}{10}$ ce qui permet, en acceptant la commutativité de construire ce nouveau tableau : multiplier par $\frac{1}{10}$. (...)

En comparant ces deux tableaux on constate que multiplier un entier par $\frac{1}{10}$ équivaut à diviser cet entier par 10. On étendra cette règle à la multiplication d'un décimal par $\frac{1}{10}$.

Par exemple pour calculer $\frac{2}{100} * \frac{1}{10}$, on divisera $\frac{2}{100}$ par 10.

Comment donner un sens à $\frac{2}{10} * \frac{3}{100}$?

$$\frac{2}{10} * \frac{3}{100} = \frac{2}{10} * \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100}\right)$$

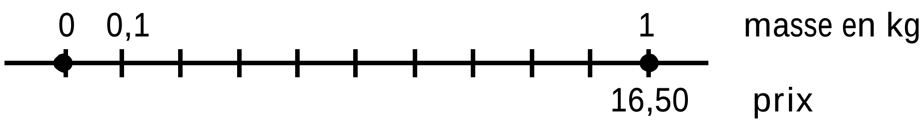
$$= \frac{2}{1000} + \frac{2}{1000} + \frac{2}{1000} = \frac{2}{1000} * 3 \text{ (...)}$$

L'auteur précise [134] :

> Cette présentation ne peut se faire sans un travail préalable et parallèle sur des situations de proportionnalité (par exemple réalisation de maquettes à une échelle donnée).

Finalement, on retrouve les deux principales situations multiplicatives utilisées dans les ingénieries de Guy Brousseau et de Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin, les agrandissements – réductions et les calculs d'aires de rectangles. Ces situations permettent de ne pas changer de conception de la multiplication en la prolongeant des entiers aux décimaux.

Les auteurs de *Travaux numériques* proposent aussi une activité que nous avons déjà présentée de double graduation de droite pour déterminer le produit de deux décimaux [135] :



[134] *Ibid*. [p. 162].

[135] DUPÉ C. & HILLION M. (1998), *Op. cit*. [p. 61].

> Etudions la correspondance entre la masse et le prix du pain pour 16,50 F par kg. Compléter les deux graduations figurant sur la feuille, puis à l'aide de ces données, déterminer le prix d'un bâtard de 200 g et le prix d'un pain de campagne de 500 g.

Les auteurs de *Apprentissages mathématiques* utilisent la même situation dans des problèmes de proportionnalité non pour permettre le calcul du produit ni pour mettre en évidence la structure multiplicative mais seulement pour proposer à l'élève [136]

> un nouvel outil permettant de résoudre des problèmes de proportionnalité : la bande à double graduation (...)
>
> Cette dernière fournit un support visuel pour les grandeurs en question (plus exactement pour leurs mesures relatives à des unités précises).

Des procédures personnelles à la technique usuelle

Ce passage n'est pas développé dans ces ouvrages. Les auteurs en laissent la charge aux enseignants ; ou estiment-ils qu'il ne pose pas de difficulté ? Les auteurs de *Travaux numériques* sont les seuls à mentionner ce passage, ils se contentent d'une remarque à la fin de deux activités où seules des procédures personnelles permettent de déterminer des produits [137] :

> L'étude des deux cas permet de découvrir une règle de calcul du produit de deux nombres décimaux en utilisant deux entiers :
>
> Transformons le produit de 0,2 par 16,5 en un produit d'un entier par un entier. On choisit le produit de 2 par 165. A l'aide du produit de 2 par 165, trouver une règle permettant de calculer 0,2 * 16,5.
>
> A partir des deux exemples précédents, les élèves vérifieront cette règle sur d'autres produits.

Les réinvestissements dans de nouvelles situations multiplicatives

Ces activités ne figurent pas dans les ouvrages à destination des enseignants. Certains auteurs signalent la nécessité des réinvestissements. Mais ils sont toujours laissés à l'initiative des professeurs.

Néanmoins, des situations multiplicatives différentes convoquent des conceptions différentes de la multiplication. Des auteurs signalent les difficultés que rencontrent certains élèves pour résoudre des problèmes et les expliquent par des conceptions inadaptées. Ils suggèrent alors des activités dites de « remédiation » qui permettraient de modifier les représentations que ces élèves ont de la multiplication.

Apprentissages mathématiques (×) comme *Travaux numériques* (××) proposent des situations liées à l'ordre entre les facteurs et le produit, leurs présentations sont très ressemblantes [138] :

---

[136] PRESSIAT A. (1991), *Op. cit.* [p. 98].

[137] DUPÉ C. & HILLION M. (1998), *Op. cit.* [p. 61].

[138] PRESSIAT A. (1991), *Op. cit.* [pp. 54 et 64].
DUPÉ C. & HILLION M. (1998), *Op. cit.* [p. 58].

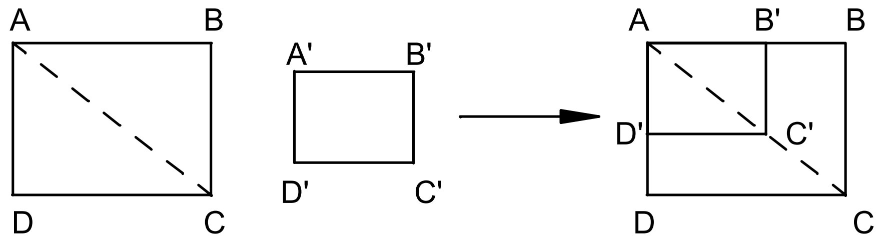
(×) Buts

- Amener les élèves à modifier leur conception courant de la multiplication comme « opération qui agrandit toujours » (Obstacle)
- Amener les élèves à savoir anticiper la place d'un produit par rapport à chacun de ses facteurs.

(...) amener les élèves à remettre en cause le modèle additif dans un problème d'agrandissement.

(××) Il s'agit, par des situations simples, d'amener les élèves à modifier la conception selon laquelle la multiplication agrandit toujours. La multiplication peut aussi réduire.

Les deux ouvrages contiennent une activité où l'élève doit éliminer, parmi plusieurs résultats proposés pour des produits, ceux qui sont faux. Il utilise pour cela le calcul approché, ou la prise en compte du dernier chiffre, ou la prise en compte du nombre de chiffres après la virgule, ou enfin la place de l'un des facteurs par rapport à 1. Ces ouvrages contiennent également une activité d'agrandissement et de réduction. *Apprentissages mathématiques* a choisi l'activité du puzzle de Guy Brousseau. *Travaux numériques* propose d'effectuer une réduction A'B'C'D' d'un rectangle ABCD avec la diagonale [AC] tracée.



Après une superposition qui fait coïncider les deux sommets A et A', les deux longueurs [AB] et [A'B'] et les deux largeurs [AD] et [A'D'], l'appartenance du sommet C' à la diagonale [AC] est un critère qui permet de distinguer l'utilisation d'un modèle additif et l'utilisation un modèle multiplicatif.

Conclusion : la multiplication, des transpositions divergentes

Nous avons, dans ce chapitre, analysé les transpositions didactiques de la multiplication des nombres décimaux dans les différentes institutions que sont les publications de recherches, les ouvrages et les brochures à l'intention des enseignants et les manuels scolaires. Nous avons constaté des différences importantes.

Trois catégories d'enseignement, quelle pertinence ?

Nous avons débuté cette étude des publications en les distinguant suivant plusieurs catégories déterminées en fonction de choix didactiques : la multiplication est-elle présentée d'abord de façon contextualisée, la technique opératoire est-elle construite au moins en partie par les élèves et, si ces deux conditions sont réalisées, la technique est-elle construite en référence à la situation du contexte initial ? Les textes officiels semblent préconiser un enseignement comprenant une phase contextualisée [139] :

> La résolution de problèmes occupe une place centrale dans les apprentissages mathématiques, à l'école primaire comme au collège, notamment en vue de l'appropriation de connaissances nouvelles par les élèves.

Mais l'utilisation du mot *problème* en mathématique est tellement diverse que les interprétations possibles de ce fragment de texte nous semblent nombreuses.

Nous avons réparti, par une première lecture, les publications suivant trois catégories que nous avons analysées successivement. Les enseignements proposés dans les deux premières catégories sont décontextualisés, ils se distinguent par l'existence d'une phase de construction de la technique opératoire laissée, au moins en partie, aux élèves. Les publications de la troisième catégorie proposent un enseignement comprenant une phase contextualisée. Nous pouvons à présent conclure sur la réelle pertinence de cette classification pour différencier les enseignements proposés.

Les manuels scolaires appartiennent tous à l'une des deux premières catégories. L'organisation des chapitres présente trois phases, quel que soit l'éditeur : des activités de révision et de découverte des nouveaux savoirs, un cours avec des exemples développés, des exercices d'application. Malgré cette apparente homogénéité, les propositions d'enseignement de la première catégorie ne proposent aucune construction de la technique opératoire dans les pages étiquetées « *activités préparatoires* », les élèves devant seulement lire un exposé du cours. En outre, nous avons montré que les activités préparatoires des manuels de la deuxième catégorie se distinguaient seulement des précédentes par une formulation plus ouverte, la place réservée au travail de l'élève étant toujours très limitée et insuffisante pour permettre une complète construction de la technique. Les propriétés algébriques de l'opération sur lesquelles repose la technique restent notamment toujours implicites. En cela, rien ne distingue les manuels de collège de ceux du primaire. Tout se passe comme si la distinction des deux premières périodes de l'enseignement était aménagée dans les livres par une maquette mais n'était pas assumée par les auteurs autrement que par une introduction au cours, ce que proposaient déjà des manuels scolaires anciens comme celui que nous avons analysé et qui a été publié en 1947...

Les autres publications, ouvrages et brochures à l'intention des enseignants et recherches en didactique des mathématiques, appartiennent toutes à la troisième catégorie. Le bilan de notre étude montre que les auteurs qui s'adressent aux professeurs n'ont pas cherché à tisser un lien entre le sens de la multiplication et la technique opératoire. Nous pourrions résumer ainsi la situation : soit la publication est une documentation pédagogique et alors le sens est privilégié mais les auteurs en restent à des procédures personnelles de détermination du produit, soit la publication est une ingénierie didactique et alors l'enseignement est d'abord

[139] Mathématiques : articulation école–collège, BO n°44 du 5 décembre 1996.

contextualisé et il comprend la construction d'une technique de calcul qui s'appuie sur la situation du contexte.

Quant aux situations multiplicatives de réinvestissement dont l'objectif est d'enrichir à la fois le sens de l'opération, celui des nombres et de leurs écritures, elles sont globalement délaissées par les auteurs, même par ceux des manuels scolaires qui proposent de nombreux exercices mais qui, à une exception près, accordent une importance écrasante aux problèmes de prix. Il nous semble que cette constatation est à relier à la disparition de l'enseignement des grandeurs usuelles que nous avons signalée dans le chapitre précédent. Peut-être les prix sont-ils les seules grandeurs qui soient familières aux élèves sans que l'école ait à se charger de leur enseignement. L'expérience italienne d'enseignement à partir de tickets de caisse réalisée par Milena Basso & Cinzia Bonotto montre toutefois qu'une réelle expérience sociale des situations liées au calcul des prix n'est pas acquise par les élèves de cet âge. Elle montre aussi qu'à partir d'un tel domaine d'expérience peuvent émerger et se construire, dans le cadre scolaire, des savoirs mathématiques décontextualisés.

Nous pouvons maintenant répondre à la question de la pertinence de la distinction des trois catégories d'enseignement. Le critère dominant qui discrimine le contenu des publications est l'appartenance ou non à la catégorie « manuel scolaire » dont les auteurs proposent un enseignement qui « démarre » avec la technique opératoire puis proposent éventuellement des activités d'argumentation et de réflexion sur cette technique. Nous retrouvons là l'opposition constatée par Jeanne Bolon entre les programmes et les travaux issus de la didactique des mathématiques [140] :

> Or les programmes officiels de sixième (...) Dans ces conditions (...) On peut se demander si le processus des progressions de référence, contextualisation puis décontextualisation puis recontextualisation, est compatible avec la gestion du temps didactique des classes de collège.

De plus, les publications à l'intention des enseignants ne prévoient pas une construction de la technique opératoire qui s'appuie sur la situation d'introduction de la multiplication des nombres décimaux, elles n'aménagent pas de lien entre des procédures personnelles « artisanales » de calcul et la technique usuelle.

Multiplications des décimaux, quels nombres avec quelles écritures ?

Les deux ingénieries introduisent les nombres rationnels avant les nombres décimaux, envisagés comme des rationnels particuliers. Les nombres et les opérations sont introduits par des situations. Ainsi, dans ces travaux, lors de l'étude de la multiplication des décimaux, les nombres sont soit des nombres-mesures soit des nombres-scalaires et leurs écritures sont multiples (fractionnaires, fractionnaires décimales ou décimales) bien que l'écriture fractionnaire soit privilégiée, ce qui est exploité.

Dans les manuels, à une exception près, les nombres décimaux sont traités, dans le chapitre de la multiplication, sans lien avec les fractions ; la seule écriture

[140] BOLON J. (1996), *Op. cit.* [pp. 327-328].

est l'écriture décimale. Lors de l'introduction de l'opération, les nombres sont abstraits, ils le sont encore dans les premiers exercices posés qui portent sur la technique opératoire et sur des questions plus théoriques. Quelques problèmes sont posés (presque uniquement de prix) où les nombres sont des nombres–mesures ou des nombres–scalaires.

Les occasions de changements de registres dans les publications sont rares. On en trouve principalement dans l'ingénierie de Régine Douady & Marie–Jeanne Perrin, ou le calcul de 0,5 * 0,7 est considéré comme le calcul de $\frac{7}{10}u * \frac{5}{10}u$, ce qui permet aux auteurs de recourir à des pavages rectangulaires dans un calcul d'aire pour déterminer le produit (changement de cadres).

Multiplication des entiers et des décimaux, rupture ou continuité ?

Les textes officiels déjà cités [141] signalent une difficulté d'enseignement de la multiplication des décimaux : la reconnaissance des situations où intervient le produit de deux décimaux « *est difficile dans la mesure où il existe une rupture de sens avec les cas du produit de deux naturels et d'un décimal par un naturel, cas pour lesquels la référence à l'addition réitérée est possible pour accéder à la multiplication.* »

Les auteurs privilégient pourtant les situations assurant une continuité de sens dans le passage de la multiplication des entiers à celle des décimaux. Soit, et c'est le cas des ingénieries didactiques comme de certaines publications destinées aux professeurs, une situation multiplicative est étudiée qui préserve le sens de l'opération dans le passage des entiers aux décimaux : agrandissements de figures planes, calculs d'aires de rectangles ou utilisation d'une double graduation. Soit, et c'est le cas de tous les manuels, la technique opératoire est étudiée à partir de celle de la multiplication des entiers sans référence à une situation multiplicative.

La relation entre la multiplication et l'addition n'est vraiment questionnée que dans les activités de calcul d'aire de rectangle où la distributivité apparaît simplement. Ce n'est pas le cas avec l'activité d'agrandissement de puzzles qui tend à opposer les deux opérations. En effet, la première étape de l'enseignement consiste à écarter l'addition qui ne répond pas à la situation pour cause de déformation des pièces. Puis les élèves apprennent d'une part que pour augmenter on peut aussi multiplier, et d'autre part que dans les situations d'agrandissements de figures sans déformation c'est plutôt du côté de la multiplication qu'il faut aller chercher. Enfin, les activités se succèdent, nombres et opérations se construisent en référence à la situation d'agrandissement, le modèle additif n'est plus questionné.

Avec les programmes actuels, toutes les situations multiplicatives étudiées à l'école élémentaire ont au moins l'un des facteurs entiers. Quatre années durant, les problèmes posés avec ces situations, à l'exception des problèmes de dénombrement, auront pu trouver leur solution en référence à l'addition réitérée. Dans un problème de prix, nous prenons cet exemple du fait de l'importance qu'il

[141] Mathématiques : articulation école–collège, BO n°44 du 5 décembre 1996.

lui est accordé dans les manuels, le calcul de 3 kg de pommes à 12 F/kg peut être traité par une procédure additive, celui de 0,284 kg de merlan à 69,90 F/kg ne le peut pas. La situation est la même mais l'opération qui fait référence doit changer. Elle doit changer parce que les nombres ont changé. La multiplication doit remplacer l'addition mais ne saurait la faire disparaître. Nous avons donc affaire, non pas à une situation de rupture, mais à une situation de prolongement « à deux dimensions ». Un prolongement des entiers aux décimaux : tous les entiers sont intégrés aux décimaux mais il y a des décimaux qui ne sont pas des entiers. Un prolongement de l'addition à la multiplication : toutes les additions réitérées sont des multiplications mais il y a des multiplications qui ne sont pas des additions réitérées.

L'étude de la transposition didactique de la multiplication des nombres décimaux montre des divergences entre les institutions qui en publient des propositions d'enseignement : manuels scolaires, publications à l'intention des professeurs, recherches en didactique des mathématiques. Pour préparer leurs cours, les enseignants utilisent différents matériaux publiés. Leurs choix s'effectuent en fonction de multiples composantes personnelles dont notamment leurs conceptions sur les mathématiques, leur apprentissage et leur enseignement. Leur choix est aussi déterminé par des contraintes globalement partagées par tous les professeurs et qui viennent de l'exercice même du métier : ils doivent tenir compte de leurs élèves (de ce qu'ils savent déjà et des difficultés d'apprentissage connues de la notion enseignée), ils doivent aussi prévoir un enseignement qui s'intègre dans le programme de l'année scolaire. Aussi, nous allons procéder à une évaluation de ces contraintes et de leur portée sur les projets que les enseignants peuvent élaborer.

CHAPITRE 3

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE À l'ÉPREUVE DE L'EXERCICE DU MÉTIER

Sommaire

Dans le chapitre précédent, nous avons examiné des propositions de différents auteurs pour enseigner la multiplication des nombres décimaux. Certaines d'entre elles sont directement adressées aux enseignants. D'autres, qui à l'origine étaient adressées aux chercheurs, ont été reprises dans des brochures pédagogiques ou dans des ouvrages de formation des professeurs.

Parce qu'elle montre les possibles et leurs conséquences sur l'apprentissage, cette étude fournit en outre une synthèse utile à un formateur qui aurait la charge d'un stage sur l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux, ou à un professeur en classe de sixième. Cette étude n'est cependant pas encore suffisante pour constituer un véritable outil de travail pour le formateur ou pour le professeur. En effet, le professeur recherche de quoi préparer ses propres cours donc il va spontanément éliminer tout ce qui lui semblera ne pas répondre à cet objectif. Dans sa thèse, Jeanne Bolon montre que les enseignants reprennent les propositions d'activités sous certaines conditions [142] :

> En proposant aux enseignants des suggestions, sans obligation pour eux de les employer (en totalité ou en partie), nous avons cherché à fabriquer une sorte de test d'acceptabilité : selon les cas, les enseignants (...) pouvaient être conduits à ne pas tenir compte de ces suggestions pour des raisons diverses : difficulté à comprendre les tenants et les aboutissants d'une suggestion, difficulté à l'insérer dans la progression en cours, manque de temps ou manque de sécurité pour le faire, doute sur le bien-fondé de la suggestion pour leurs élèves. Quel qu'ait pu être le motif ressenti, il permettait de faire émerger les raisons qui fondaient les choix des enseignants. Inversement, l'acceptation d'une suggestion prouvait qu'elle était perçue comme compatible ou cohérente avec la progression adoptée et possible ou facile à mettre en œuvre immédiatement, sans surcroît de travail démesuré.

Ainsi, l'auteur propose trois critères pour analyser cette sélection : la difficulté d'enseignement, l'adaptation aux élèves, et l'adaptation à la progression choisie (qui comprend la durée). Explicitons - les davantage.

Le premier critère est la difficulté d'enseignement. Un professeur a l'expérience de la classe, il connaît les projets qu'il anime facilement et ceux qui l'ont embarrassé. La difficulté vient parfois du contenu enseigné : lors d'une précédente recherche [143], nous avons montré, par une analyse des pratiques d'un professeur en classe, que certaines questions mathématiques plus délicates repérées *a priori* ont été l'occasion d'un travail spécifique de la part de l'enseignant durant le déroulement des séances. La difficulté peut venir aussi de l'animation requise par un projet et dont le professeur n'a pas l'habitude : travail en groupe, autonomie de la recherche des élèves, manipulations concrètes... Ces causes ne

[142] BOLON J. (1996), *Comment les enseignants tirent - ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière Ecole–Collège,* Paris : Thèse de didactique des mathématiques de l'Université de Paris 5. [pp. 323–324].

[143] RODITI E (1997), *DEA de didactique des disciplines, Didactique des mathématiques - Le tableau noir, un outil pour la classe de mathématiques,* Cahier DIDIREM n°30, Paris : IREM de Paris 7.

sont pas identiques pour tous les professeurs, même expérimentés. Elles dépendent à la fois de certaines conditions personnelles liées aux conceptions des mathématiques, de leur apprentissage et de leur enseignement, et d'autres qui sont moins directement liées à la discipline étudiée.

Le deuxième critère de sélection à l'œuvre en cours de lecture de documents pédagogiques est la difficulté d'apprentissage des élèves que le professeur perçoit d'une part durant l'enseignement d'une notion (par la conduite de ses élèves, les questions qu'ils posent, les réponses qu'ils produisent), et d'autre part quand il examine les productions orales ou écrites à des questions d'évaluations.

Le troisième critère de sélection d'une proposition par le professeur qui prépare ses cours, est lié à l'intégration de cette proposition dans la programmation annuelle de son enseignement. Une notion figure dans un programme officiel. Cette notion fait partie d'un ensemble que le professeur doit gérer dans sa totalité. Le temps dont il dispose pour prévoir son enseignement intervient aussi pour l'intégrer dans cet ensemble. Une analyse de type écologique [144] permet une étude préalable de cette intégration au niveau des contenus.

L'objectif de ce dernier chapitre est de croiser l'analyse précédente de la transposition didactique en sixième de la multiplication des nombres décimaux et les contraintes sur l'élaboration d'un projet d'enseignement que représentent l'adaptation de l'enseignement aux élèves et l'intégration dans la progression annuelle, contraintes à l'origine des deux derniers critères que nous venons de citer. Le premier critère dépend de conditions personnelles des professeurs, il n'est pas utilisable pour cette étude. Ici, nous pensons seulement à des professeurs fictifs qui auraient la charge d'une classe de sixième de niveau standard. Le chapitre pourrait donc s'intituler : la transposition didactique à l'épreuve de l'exercice « virtuel » du métier.

Dans le premier paragraphe, nous abordons les difficultés des élèves à travers les résultats de différentes évaluations disponibles des compétences dont l'acquisition est attendue par l'institution scolaire. Nous avons accordé une place importante à l'examen des évaluations nationales à l'entrée en sixième qui se déroulent depuis une dizaine d'années [145]. Deux raisons expliquent ce choix. D'une part, pour notre recherche, nous bénéficions de données fiables car ces évaluations ont porté sur un effectif très important d'élèves. D'autre part, les professeurs font passer ces évaluations à leurs élèves de sixième en début d'année, ils en recueillent les résultats, et l'institution leur recommande de les utiliser pour adapter leur enseignement aux acquis de leurs élèves. Nous avons complété parfois avec les

[144] CHEVALLARD Y. (1994), Les processus de transposition didactique et leur théorisation, In Arsac et al. (Eds) *La transposition didactique à l'épreuve (*pp. 135 - 180), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

[145] Les résultats de ces évaluations figurent dans des brochures éditées par le Ministère de l'Education nationale. Les références de ces brochures sont :

DEP (depuis 1989), *Evaluation CE2 – 6ème, Résultats nationaux*, Paris : Ministère de l'Education nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, Direction de l'évaluation et de la prospective.

évaluations qu'organise l'APMEP [146] depuis 1987 qui portent aussi sur un effectif suffisant d'élèves.

Dans le deuxième paragraphe nous précisons les attentes institutionnelles concernant l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux en sixième. Des résultats ont déjà été obtenus au chapitre 2 où les programmes officiels sont utilisés. Nous les complétons par une analyse écologique de l'objet multiplication des décimaux au sein du curriculum, en primaire et au collège. Nous tentons enfin de formuler des hypothèses quant aux projets que les professeurs peuvent élaborer en tenant compte des programmes et des publications mais aussi de contraintes liées à l'exercice du métier c'est-à-dire, ici, des difficultés d'apprentissage et de l'intégration dans une programmation annuelle.

1. Quelles sont les difficultés d'apprentissage ?

Depuis 1989, le ministère de l'Education Nationale propose aux enseignants des outils d'évaluation à l'entrée en classe de sixième. Certaines des questions posées portent sur les nombres décimaux et la multiplication. Les performances des élèves à ces évaluations nationales ainsi qu'à d'autres évaluations comme celles organisées par l'APMEP révèlent certaines de leurs compétences et de leurs difficultés d'apprentissage. Les enseignants peuvent en tenir compte dans leurs préparations et dans leurs pratiques de la classe.

Pour évaluer l'influence qu'ils peuvent avoir sur l'enseignement, les résultats à ces évaluations doivent être rapportés à la taille du groupe d'élèves auquel un professeur s'adresse. Sur une classe de trente élèves, 10 % correspondent environ à trois élèves. Mais nous savons que des données statistiques ne donnent aucune indication à l'échelle d'une classe réelle, la répartition des élèves n'y est pas analogue à la répartition nationale. Ainsi, quand une erreur porte sur 10 % des élèves à l'entrée en sixième, certains professeurs peuvent n'avoir qu'un élève qui l'a commise alors que d'autres pourront en avoir une dizaine, et même plus !

Dans ce paragraphe, nous cherchons les contraintes qu'exercent les difficultés des élèves sur la préparation d'une séquence d'enseignement de la multiplication des nombres décimaux dans une classe de sixième de niveau standard. Nous retiendrons donc comme pertinents les résultats qui concernent un nombre significatif d'élèves, c'est-à-dire au moins quinze pour cent. Toutefois, en classe, les professeurs peuvent être amenés à gérer une difficulté rencontrée par un ou plusieurs élèves alors qu'elle n'apparaissait pas de manière significative dans les résultats des évaluations.

[146] Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. Depuis 1987, cette association développe un dispositif d'observation du système d'enseignement des mathématiques, il repose en partie sur des enquêtes régulières comprenant des évaluations des compétences des élèves et des opinions et conceptions des enseignants. Pour plus de détail sur ce dispositif, on consultera par exemple :

BODIN A (1994), Un observatoire du système d'enseignement des mathématiques - La situation de l'observatoire EVAPM, in *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (395-402), Grenoble : La Pensée Sauvage éditions.

Nous allons analyser les performances des élèves qui concernent la multiplication des décimaux, y compris les prérequis nécessaires à son apprentissage. Ainsi, seront étudiées les compétences relatives aux nombres décimaux et à la multiplication tant du point de vue technique que du point de vue de sa reconnaissance dans une situation décrite par l'énoncé d'un problème. Afin de montrer certaines relations entre l'enseignement et l'apprentissage, nous proposerons, quand cela sera possible, des interprétations des erreurs des élèves en référence aux enseignements des décimaux et de la multiplication que nous avons étudiés dans le chapitre précédent.

Les questions tirées des évaluations nationales à l'entrée en sixième sont référencées par EVA6 suivi de la date de passation de l'épreuve, du numéro de l'exercice et du numéro de la question. Ces évaluations et les résultats des élèves ont été publiées par le Ministère de l'Education nationale. Les questions tirées des évaluations organisées par l'APMEP sont en général référencées par EVAPM6 suivi de la date de passation de l'épreuve, la lettre référence du questionnaire et le numéro de la question.

11. Difficultés d'apprentissage des nombres décimaux

Nous avons trouvé de nombreuses questions d'évaluation sur les nombres décimaux. L'analyse des propositions d'enseignement a montré l'importance de certaines acquisitions suivant les projets qui reposent sur des conceptions différentes du nombre décimal.

Les décimaux et les rationnels

Les programmes de 1995 (×) et ses documents d'accompagnement (××) pour la classe de sixième précisent la nature de l'enseignement des fractions à l'école primaire :

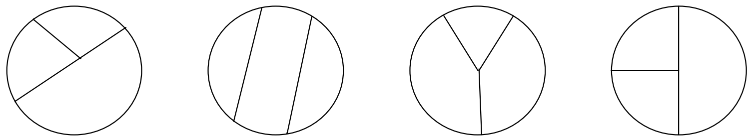
> (×) A l'école élémentaire l'écriture fractionnaire a été introduite à partir de situations de partage.
>
> (××) L'écriture fractionnaire n'est apparue que dans des exemples très simples à l'école primaire.

L'existence même de ces précisions dans les programmes indique que l'institution attend des professeurs qu'ils tiennent compte des acquis des élèves sur les nombres rationnels pour élaborer leur enseignement. Quels sont ces acquis ?

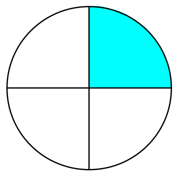
En demandant à des élèves scolarisés en classe de CM2, 6^{e}, 5^{e} ou 4^{e}, ce qu'ils diraient et ce qu'ils dessineraient à un camarade de CE2 pour expliquer $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ et 2,3, Marie-Jeanne Perrin [147] montre que le partage de « galettes » constitue la référence majoritaire et presque unique des nombres rationnels, la deuxième étant la représentation « baguette » issue d'activités de partage ou de graduation. Elle montre aussi certaines erreurs suffisamment fréquentes pour laisser à penser qu'elles ne sont pas accidentelles.

[147] PERRIN M.-J. (1984), *Représentation des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et du collège,* Cahier de didactique des mathématiques n°24, Paris : IREM de Paris 7.

Si de nombreux élèves partagent un disque en trois parts pour représenter un tiers, les parts ne sont pas toujours équivalentes. Partager équitablement un disque en trois parts n'est pas facile pour un jeune élève. Mais les parts sont suffisamment différentes pour qu'on puisse conclure que l'élève ne cherchait pas à obtenir des parts équivalentes. En voici quelques exemples :

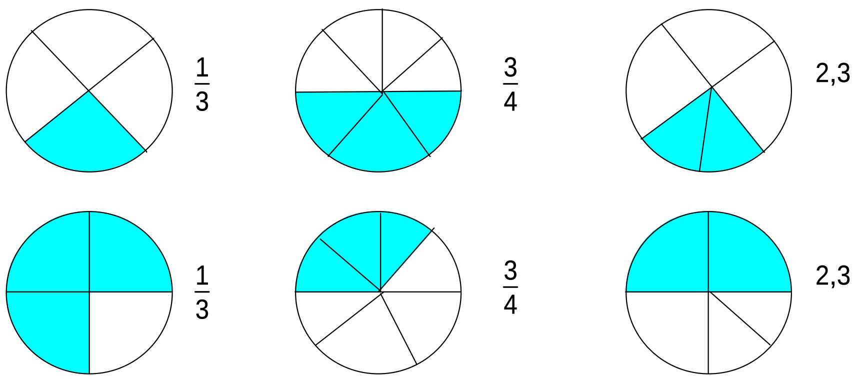


Mais nous ne devons pas en déduire que les parts resteraient différentes si le partage équitable était plus facile à réaliser.



La confusion entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ est la plus répandue. Elle ne doit pas toujours être rapprochée d'un partage en parts inégales comme le suggère le dernier partage de la figure précédente. Certains élèves expliquent : « *il le coupe en demi et la moitié il la coupe en 2. Une des parties sera le tiers* ».

Une représentation comme celle qui est proposée ci-contre montre une source de confusion entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$. L'élève a colorié une part sur quatre, mais il a aussi colorié une part et en a laissé trois blanches. Nous décrivons là une confusion entre une part coloriée pour trois blanches et une part coloriée pour trois parts. C'est-à-dire une confusion entre le rapport partie / partie-complémentaire et le rapport partie / tout. On retrouve peut-être cette confusion, cumulée à celle de l'inégalité des parts, dans certaines représentations en parts de galettes que Marie-Jeanne Perrin décrit comme issues d'une « *conception que l'on pourrait appeler 'juxtaposition de deux entiers'* ». En voici deux exemples :



Quand les élèves représentent $\frac{3}{4}$, les partages inégaux sont plus rares. Toutefois, certains élèves se contentent de dessiner trois morceaux, éventuellement étiquetés $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ et $\frac{3}{4}$ mais sans préciser le tout.

D'autres élèves confondent trois quarts et le troisième quart : un segment est partagé en quatre segments de même longueur, et le troisième segment est hachuré. Peut-être y a-t-il confusion avec les activités de graduations, l'élève ne sait plus bien si l'on mesure ou si l'on repère. A ce propos, remarquons que si en mathématiques, le tiers sert à désigner la partie d'une unité divisée en trois parties égales et se distingue du troisième, il n'en est pas ainsi dans la langue ordinaire où tiers signifie aussi troisième, comme on le trouve dans plusieurs expressions : tiers monde, se moquer du tiers comme du quart, principe du tiers exclu, un testament fait à un tiers... La confusion avec les ordinaux est toujours présente pour le cinquième, le sixième, etc. Elle trouverait son origine dans une pratique qui consiste, pour prélever un sixième d'une quantité discrète, à compter les objets un à un jusqu'à six, à écarter le sixième, et à recommencer ainsi jusqu'à épuisement de la quantité.

Les choix et les erreurs commises pour représenter $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{4}$ nous renseignent sur ce que savent les élèves des fractions : des écritures numériques à deux nombres, associées à des actions de partage et de prélèvement de parts. Les rôles respectifs du numérateur et du dénominateur dans ces actions ne sont pas toujours clairement définis.

Une question différente a été posée en 1987 dans le cadre de l'EVAPM [148] aux élèves de sixième, on leur a demandé de partager un disque représentant un gâteau en huit parts égales puis de colorier une part représentant $\frac{3}{8}$ du gâteau et une part représentant $\frac{1}{4}$ du même gâteau. 76% des élèves réussissent le partage, 71% réussissent à colorier les trois huitièmes et 45% réussissent à colorier le quart. Si l'on ramène les deux derniers pourcentages aux élèves qui ont partagé le disque en huit parts égales, on obtient respectivement 93% et 59% de réussite. La chute importante du « score » indique à la fois la bonne association entre trois parts sur huit et la fraction $\frac{3}{8}$ mais aussi la difficulté de plus de quatre élèves sur dix à colorier deux parts pour représenter un quart du disque.

Dans cette même évaluation, on demandait aux élèves, sans calculatrice, de donner l'écriture décimale des fractions $\frac{2}{5}$ et $\frac{7}{4}$. La réussite conjointe n'est que de 15% ce qui montre, compte tenu de la simplicité des divisions à effectuer, que l'écriture fractionnaire n'est pas, pour la plupart des élèves en fin de sixième et dans ce contexte, disponible en tant qu'écriture d'un quotient. La question « inverse » a aussi été posée, il fallait écrire sous forme d'une fraction les nombres 0,1, 0,6, 3,7 et 0,03. La réussite conjointe est de 34%, la réussite à au moins trois des quatre monte à 45%. On retrouve des erreurs mentionnées par Marie-Jeanne Perrin : $\frac{2}{5}$ = 2,5, 0,03 = $\frac{0}{03}$ ou 0,03 = $\frac{03}{0}$ ...

[148] APMEP - IREM de Besançon (1987), *EVAluation du Programme de Mathématiques fin de sixième,* Paris : APMEP. [p. 42, 43].

Les décimaux et les nombres composés

Avant de rencontrer les nombres décimaux, les élèves rencontrent des « nombres composés » d'heures et de minutes, de francs et de centimes, de mètres et de centimètres par exemple. Les deux entiers qui figurent dans ces nombres sont perçus par certains élèves comme étant relativement indépendants. Cette conception rejoint celle de « *juxtaposition de deux entiers* » que décrit Marie-Jeanne Perrin et qui explique des erreurs dues au traitement séparé de la partie entière et de la partie décimale.

Dans les écritures décimales. Comment les élèves passent-ils d'un « nombre composé » à un nombre décimal ? Dans la question [EVA6,95. Ex 2. a.], la consigne est de compléter un chèque par le montant en écriture décimale alors que le montant rédigé en toutes lettres apparaît : quarante-huit francs cinq centimes. La moitié des élèves répond 48,5 francs alors que la forme de l'exercice n'a pas dérouté les élèves (1,3% d'absence de réponse à cet exercice), les unités monétaires étant d'un usage courant.

Dans les calculs en ligne. Le traitement séparé de la partie entière et de la partie décimale dans des calculs apparaît notamment lorsque l'opération est donnée en ligne. Ainsi, par exemple, 7,8% des élèves répondent 3,21 à la question [EVA6,95. Ex 17. b.] où il fallait calculer 7,24 - 4,3.

Dans les comparaisons. Nous avons déjà cité les travaux de Catherine Grisvard et François Léonard sur les règles utilisées par certains élèves dans la comparaison des nombres décimaux positifs. Dans la question [EVA6,91. Ex 19. c.] les élèves devaient compléter l'inégalité 6,23 >... en choisissant un nombre parmi 6,4, 31,7, 53, 6,13, 31,07 et 65,2. Ces nombres avaient déjà servi pour des consignes analogues dans les questions a. et b. Alors que la valeur 6,13 est proposée et non 6,137 qui aurait été moins attractive, 14,1% des élèves répondent 6,4. Et parmi ceux qui répondent 6,13, combien aurait pu aussi bien écrire 6,4 ?

Les décimaux, abscisses de points de la droite graduée

Nous avons vu qu'une approche des nombres décimaux consiste à partager, sur une droite numérique, l'unité en dix parties égales repérées par 0,1, 0,2..., en reliant éventuellement la démarche à la conception du système métrique. Cette méthode facilite les comparaisons pour les élèves qui savent placer un nombre sur la droite numérique. Elle produit aussi, en phase d'apprentissage, certaines erreurs dont voici un exemple.

Dans les questions [EVA6,95. Ex 23. a. b.] les élèves devaient associer un nombre à une flèche pointant sur une marque de graduation d'une droite graduée en dixièmes où les nombres 0, 1 et 2 étaient indiqués. Un exemple leur était fourni : 0,4. Deux associations étaient demandées : 0,8 et 1,6. Les élèves ont trouvé 0,8 à 93,9% mais 1,6 à 76,8%. Certains ont compté 0,8, 0,9, 0,10, 0,11... et ils ont proposé 0,16 au lieu de 1,6. D'autres ont compté à partir de 2, l'entier le plus proche, mais ils n'ont pas inversé l'ordre et ils ont proposé 2,4.

Les décimaux et l'écriture décimale

Quand l'accent est mis sur l'écriture, le nombre décimal est décrit par une forme. Elle est constituée de chiffres, le chiffre des unités est identifié par la virgule qui le suit et l'on repère alors les autres chiffres : le chiffre des centaines, des dizaines, des dixièmes, des centièmes, etc. Les élèves doivent alors gérer un vocabulaire complexe et une virgule mobile. Le vocabulaire est complexe : ils sont nombreux à confondre dizaine et dixièmes, un dixième cardinal et le dixième ordinal, à écrire dizième ou diziaine... Quant à la virgule, elle n'est pas toujours associée au repérage du chiffre des unités mais souvent à un séparateur de la partie entière et de la partie décimale. Cela renforce la conception « *juxtaposition de deux entiers* ». Et la virgule est mobile dans certaines formulations de règles... Cette complexité pose des difficultés, en voici quelques exemples.

◆ *Le vocabulaire*. La complexité du vocabulaire entraîne des erreurs, dans les questions [EVA6,91. Ex 18. a. à d.], les élèves devaient :

- a. écrire le chiffre des centaines de 127,753. Ils sont 16% à répondre 7, négligent - ils la virgule, confondent - ils dixième et centième ou sont - ils induits en erreur par la lecture orale du nombre ? Ils sont 3,4% à répondre 5 ce qui semble correspondre à une confusion entre centaine et centième ;
- b. écrire le chiffre des dixièmes de 180,254. Ils sont alors 26,6% à répondre 5 (le chiffre des dizaines de la partie décimale) et 12% à répondre 8 ;
- c. compléter la phrase « Dans le nombre 13,456 le chiffre 4 est celui des... » Ils répondent correctement pour 42,2% d'entre eux et 21,0% répondent centaines.

◆ *La gestion de la virgule*. Parler de gestion de la place de la virgule peut sembler mathématiquement réducteur, néanmoins de nombreuses règles de calcul sont formulées en deux parties, la première en considérant les nombres entiers obtenus en supprimant la virgule et la seconde en plaçant la virgule au résultat.

Pour l'addition ou la soustraction de deux décimaux, on place les nombres en disposant les virgules les unes sous les autres, on effectue l'opération sans tenir compte des virgules puis on place la virgule au résultat sous les autres virgules. A condition de ne pas l'oublier... Dans la question [EVA6,97. Ex 15. c.] les élèves devaient effectuer l'addition posée 168,75 + 42,50. Ils sont 10,7% à trouver les bons chiffres de la somme mais à oublier (à ne pas écrire) la virgule ou à ne pas bien la placer.

Pour la multiplication de deux décimaux, on effectue le calcul sans tenir compte de la virgule, on obtient le produit cherché en plaçant correctement la virgule. Il peut y avoir confusion avec la méthode décrite pour l'addition quand les deux facteurs sont disposés comme dans une addition. Ainsi, la consigne de [EVA6,91 Ex 23. b.] était d'effectuer la multiplication posée 11,4 * 5,3 et les virgules étaient disposées l'une sous l'autre. Après avoir obtenu les bons chiffres du produit, les élèves oublient (n'écrivent pas) la virgule pour 14% d'entre eux et ne la placent pas correctement pour 7,1% d'entre eux. Soit au total plus d'un élève sur cinq. Mais la virgule n'est pas la seule cause des erreurs des élèves, nous y reviendrons plus précisément à propos des difficultés d'apprentissage relatives à la multiplication des décimaux.

Les décimaux et les ordres de grandeur

Les élèves savent-ils donner l'entier le plus proche d'un nombre décimal donné ? La question [EVAPM6,87 B. 17.] propose trois nombres décimaux « donnés par la calculatrice » (c'est affirmé par l'énoncé) et demande d'écrire à côté de chacun d'eux, l'arrondi à l'unité la plus proche. Un exemple est fourni : 36,859 réponse : 37. Les trois nombres donnés sont 123,45, 3,95459 et 0,23456. En fin de sixième, 24% répondent correctement pour les trois nombres, 46% pour deux des trois.

D'autres évaluations ont proposé d'inscrire cette question d'approximation dans un contexte de calcul. Voyons par exemple [EVA6,94 Ex 15. 1) 2)] :

> Tu feras cet exercice sans poser d'opération.
>
> 1) Martine affirme que : « 72 * 1,9 est proche de 140. »
> Es - tu d'accord avec Martine ou non ? Explique pourquoi.
>
> 2) Une classe de collège compte en moyenne 25 élèves. Le nombre d'élèves dans un collège de 21 classes est proche de : 300 400 500
> a. Entoure la réponse qui te semble la plus proche du résultat.
> b. Explique ton choix.

Les résultats permettent de comparer l'utilisation des approximations suivant que les nombres sont décimaux ou entiers. A la première question, 32% des élèves répondent « oui » (c'est-à-dire la bonne réponse) avec ou sans explication. A la seconde question 44,7% des élèves entourent 500 (c'est-à-dire la bonne réponse) avec ou sans explication. La performance des élèves montre que la détermination d'approximations par des entiers n'est pas acquise à l'entrée en sixième mais aussi qu'elle est plus difficile quand elle porte sur des nombres décimaux plutôt que sur des nombres naturels.

Les décimaux et les grandeurs usuelles

Nous avons vu que de nombreux exercices qui portent sur la multiplication de nombres décimaux sont issus de situations d'isomorphisme de grandeurs, les décimaux sont alors des mesures de ces grandeurs, une unité étant choisie. Mais les élèves disposent-ils de quelques références de mesures de grandeurs usuelles ? C'est la question posée par [EVA6,93 Ex 3.] :

> Pour chaque phrase, entoure la bonne réponse.
>
> a) La surface d'un timbre-poste ordinaire mesure :
> 5 mm² - 5 cm² - 5 dm² - 5 m²
>
> b) Un pot de yaourt individuel contient :
> 2,5 mℓ - 12,5 cℓ - 12,5 dℓ - 12,5 ℓ
>
> c) Le diamètre d'une roue de vélo d'adulte est :
> 10 mm - 50 mm - 150 mm - 700 mm
>
> d) Un œuf de poule pèse environ :
> 0,65 g - 6,5 g - 65 g - 650 g

Les pourcentages de bonnes réponses à ces questions sont respectivement : 43,0%, 66,8%, 47,3% et 36,6%. Ainsi, à l'entrée en sixième, dans le contexte de questions scolaires[149], un élève sur deux ne possède aucun moyen de contrôle de la pertinence des données de l'énoncé ou de la réponse qu'il produit à un problème qui porte sur ces grandeurs usuelles.

Conclusion : une maîtrise encore insuffisante du nombre décimal

Les élèves abordent les nombres décimaux à l'école primaire, ils en voient différents aspects. Chaque aspect doit contribuer à ce que les élèves comprennent le sens des décimaux et à ce qu'ils puissent mobiliser certaines techniques liées à la numération et aux opérations. Les performances des élèves à différentes évaluations montrent que les nombres entiers sont bien mieux acquis que les nombres décimaux. Les élèves ont des difficultés pour approcher un décimal par un entier, que la question soit posée ou non en référence à une situation. A la fin de l'école primaire, les nombres décimaux restent, pour certains élèves, deux entiers séparés par une virgule, ces entiers ayant éventuellement des statuts différents. Les pourcentages d'erreurs qui correspondent à cette conception varient entre 10 % et 50 % suivant les questions posées.

Ces résultats montrent que les professeurs ne peuvent envisager d'enseigner la multiplication des décimaux en s'appuyant sur la notion de nombre décimal avec seulement les connaissances des élèves à l'entrée en sixième. Les deux ingénieries didactiques de construction des décimaux sont des exemples d'enseignement qui ne peuvent être repris sans que cette notion soit travaillée. Comment les professeurs de sixième pourraient-ils prendre en compte cette réalité quand ils préparent leurs cours sur la multiplication des décimaux ? Nous tenterons de répondre à cette question après avoir, comme nous venons de le faire pour les nombres décimaux, montré quelles sont les compétences des élèves sur la multiplication.

12. Difficultés d'apprentissage de la multiplication

L'analyse des propositions d'enseignement de la multiplication des nombres décimaux a montré que nombre d'entre elles qui figurent dans les manuels scolaires s'appuient sur la multiplication de deux entiers et sur la multiplication d'un entier par une puissance de dix. Après avoir examiné ces deux cas particuliers, nous étudions les résultats concernant la multiplication de deux décimaux. Nous cherchons à déterminer des démarches qui traduisent des difficultés d'apprentissage et dont les professeurs tiennent sans doute compte lorsqu'ils préparent leurs cours. Puis nous analysons les performances des élèves quant à la résolution de problèmes multiplicatifs.

Technique de la multiplication de nombres entiers

On pourrait penser *a priori* que les décalages et la présence de zéros au multiplicateur sont les causes des erreurs les plus fréquentes des élèves. En fait les évaluations montrent que la première des difficultés des élèves est la méconnaissance des tables de multiplications, surtout celles de six à neuf. Voyons

[149] Nous précisons l'importance du contexte scolaire car, en dehors de la classe, les enfants trouveraient peut-être d'autres manières de contrôler leurs réponses.

quelques exemples pour lesquels nous présentons, dans l'ordre, le questionnaire et l'année de passation de l'évaluation, la question, le pourcentage de réussite et des remarques complémentaires éventuelles.

• IREM & CRDP, 78 [150]

312 * 24	Réussite : 81,5 %	543 * 26	Réussite : 71,0 %
236 * 403	Réussite : 57,4 %		

• EVA6,92

231 * 305	Réussite : 77,8 % ; décalage correct mais erreurs de calcul : 9,1 % ; pas de décalage avec ou sans erreur de calcul : 4,6 %

• EVA6,93

452 * 107	Réussite : 68,3 % ; décalage correct mais erreurs de calcul : 15,6 % ; pas de décalage avec ou sans erreur de calcul 3,2 %

• EVA6,91

759 * 109	Réussite : 51 % ; décalage correct avec erreurs de calcul : 29,3 % ; décalage faux avec ou sans erreur de calcul : 2,9 %
420 * 30	Réussite : 75,3 % ; erreur de zéro : 9,9 %

L'enquête menée par l'académie de Haute Corse et l'IREM de Nice montre la décroissance de la performance des élèves quand on passe d'une multiplication sans retenue à une multiplication avec retenue (81,5 % à 71,0 %) et quand on passe d'une multiplication avec retenue sans zéro intercalé au multiplicateur à une multiplication avec retenue et un zéro intercalé au multiplicateur (71,0 % à 57,4 %).

Les trois premières multiplications citées à partir des évaluations nationales à l'entrée en sixième montrent aussi l'importance de la méconnaissance de certains produits de la table de multiplication parmi les causes des difficultés des élèves. Ces multiplications sont comparables du point de vue technique : elles contiennent des retenues, elles portent sur deux facteurs à trois chiffres avec un zéro intercalé comme deuxième chiffre du multiplicateur. Mais dans la première, les facteurs ne comportent pas de chiffre « supérieur » à 5, dans la deuxième, un des facteurs en contient un, et dans la troisième, les deux facteurs en contiennent. L'augmentation des erreurs de calcul est sensible : elles sont respectivement de 9,1 %, 15,6 % et 29,3 % parmi les élèves qui décalent correctement les produits partiels.

Néanmoins, les erreurs dues à la présence d'un zéro au chiffre des unités du multiplicateur ne sont pas à négliger, comme le montrent les 9,9 % d'erreurs à la multiplication 420 * 30.

[150] L'académie de Haute Corse, associée à l'IREM de Nice, a publié en 1981 une brochure sur le nombre décimal. Elle contient une enquête qui a été réalisée en 1978, elle a porté sur 303 élèves de sixième. Parmi les questions posées, figurent dix multiplications de difficulté variable.

IREM de Nice & CDDP de la Haute Corse (1981), *Le nombre décimal,* Bastia : CDDP de la Haute Corse.

Les multiplications par 10, 100, 1 000...

Deux raisons pour étudier ces multiplications par 10, 100 ou 1 000... D'une part, elles forment un cas particulier des multiplications d'un décimal par un entier qui sont enseignées à l'école primaire et, d'autre part, elles sont utilisées dans de nombreuses propositions d'enseignement de la multiplication des nombres décimaux : pour calculer 3,2 * 5,17, on calcule 32 * 517 (ce qui revient à multiplier respectivement par 10 et par 100 les deux facteurs) puis on divise le produit par 1 000 (pour compenser les deux multiplications).

Nous remarquons des difficultés des élèves qui sont liées à celles qu'ils éprouvent avec les nombres décimaux et plus exactement avec l'écriture décimale. Ils apprennent à l'école primaire que, par une multiplication par 10, le chiffre des unités du multiplicande devient le chiffre des dizaines du produit ou que la virgule est décalée d'un cran vers la droite. Soit on retrouve les difficultés liées à la complexité du vocabulaire, soit les élèves décalent indistinctement vers la gauche ou vers la droite, soit encore ils sont gênés quand la virgule « disparaît ». Et l'on trouve aussi des traces de règles apprises pour multiplier un nombre entier par 10, certains élèves « ajoutent » des zéros à l'écriture du multiplicande. Voyons en quelques exemples issus des évaluations.

- *Multiplications par 10*

• EVA6,91 et 95 — 63 * 10
Réussite 94,3 % en 1991 et 91,5 % en 1995

• EVA6,92 — 38,45 * 10
Réussite 60 %

• EVA6,94 — 2,3 * 10
Réussite 77,4 %, 10,4 % répondent 20,3 ou 2,30 et 6,3 % répondent 230.

On remarque que la technique de multiplication d'un entier par 10 est mieux acquise que celle d'un décimal. Le dernier exercice montre que plus de 15 % des élèves appliquent « comme ils peuvent » la technique qu'ils connaissent le mieux pour multiplier un décimal.

- *Multiplications par 100 ou 1 000*

• EVA6,95 — 7,14 * 100
Réussite 63,3 %, des élèves utilisent une règle analogue à celle qui concerne les entiers : 9,9 % répondent 7,1400, 4,5 % répondent 700,14 ou 700,1400, enfin 7,8 % effectuent un mauvais déplacement de virgule.

• EVA6,92 — 27,1 * 100 — Réussite 47,3%

• EVA6,94 — 35,2 * 100
Réussite 59,5%, 9,7% répondent 3500,2 ou 35,200 et 15,7% répondent 352.

Même constatation que pour la multiplication par 10 : la technique de multiplication d'un entier par 100 est mieux acquise que celle d'un décimal. On remarque aussi que près d'un élève sur 6 est en difficulté quand, pour effectuer 35,2 * 100, il a décalé la virgule d'un rang, que la virgule disparaît et qu'il devrait la décaler d'un autre rang vers la droite c'est-à-dire ajouter un zéro. L'enchevêtrement des techniques semble à l'origine de ces erreurs.

Les multiplications par 1 000 conduisent aux mêmes constatations, avec une chute des résultats quand l'élève doit supprimer la virgule et ajouter des zéros : seulement 48,0% d'entre eux réussissent à effectuer 18,7 * 1000 (EVA6,92).

Les divisions par 10, 100, 1 000...

Comme nous venons de le rappeler, ces divisions d'un nombre décimal par 10, 100 ou 1 000... sont utiles pour certains enseignements de la multiplication des nombres décimaux. En outre, elles sont à rapprocher de la multiplication par une puissance entière négative de dix.

- *Divisions par 10*

• EVA6,95	630 ÷ 10 Réussite 81,4%	• EVAPM6,89	287 ÷ 10 Réussite 80%
• EVA6,91	325,6 ÷ 10 Réussite 62,1%	• EVA6,92	38,45 ÷ 10 Réussite 63,8%
• EVA6,93	0,1034 ÷ 10 Réussite 30,5%		

Les performances des élèves montrent que la division d'un nombre entier par 10 est mieux acquise que celle d'un décimal, et ceci que le chiffre des unités soit zéro ou non. Les réussites chutent de plus de 15% en passant d'un entier à un décimal lorsque ce dernier comporte au moins deux chiffres à la partie entière, c'est-à-dire lorsqu'un simple décalage de virgule est possible. Les résultats chutent de plus de 30% lorsque la partie entière est nulle.

- *Divisions par 100 ou 1 000*

• EVA6,95	67 ÷ 100 Réussite 53,9%	• EVA6,93	8006 ÷ 100 Réussite 42,5%
• EVA6,92	27,1 ÷ 100 Réussite 47,7%	• EVA6,94	936,7 ÷ 100 Réussite 53,6%

Les performances des élèves indiquent que la division par 100 est plus difficile que la division par 10. Que le diviseur soit entier ou non ne semble pas influencer les résultats. En revanche, la division par 1 000 quand il y a plus d'un zéro à « ajouter » à gauche fait chuter les scores :

• EVA6,95	3000,6 ÷ 1000 Réussite 47,3%	• EVA6,92	18,7 ÷ 1000 Réussite 37,0%

Les multiplications de deux décimaux

Le fait que le changement de programme, qui a fait passer la multiplication de deux décimaux de CM2 en 6e, soit récent nous permet d'avoir des résultats d'évaluations de la multiplication d'un décimal par un entier mais aussi de deux décimaux à l'entrée en sixième.

Parmi les résultats aux multiplications de décimaux, il faut différencier les opérations données en lignes de celles qui sont posées car, comme le fait remarquer l'équipe de l'APMEP chargée de la rédaction de la brochure EVAPM 6e 1987, « *La lecture non–courante des nombres crée des erreurs de copie quand une opération est proposée en ligne et qu'elle doit être effectuée en colonne.* »

◆ *Opérations données en ligne*

• IREM - CDDP,78 [151]

543 * 0,12 Réussite 64,4 %	17,9 * 32 Réussite 61,1 %	1246 * 2,5 Réussite 62,7 %
2,6 * 0,25 Réussite 47,2 %	912,4 * 5,123 Réussite 43,6 %	37,35 * 2,34 Réussite 42,9 %

86,34 * 340 Réussite 34,7 %

• EVAPM6,87 — 54,15 * 3,02 Réussite 57% — 73,9 * 60,2 Réussite 55%

• EVAPM6,89 — 40,75 * 6,20 Réussite 51%

◆ *Opérations posées*

• EVA6,91 11,4 * 5,3
Réussite 58%, chiffres exacts mais faute de virgule 21,1% [152]

• EVA6,92 7,46 * 3,1
Réussite 52%, chiffres exacts mais faute de virgule 20,1%

• EVA6,94 63,4 * 2,12
Réussite 49,6%, chiffres exacts mais faute de virgule 21,2%

L'examen des performances des élèves montre que les causes d'erreurs sont variées. Il semble que - à une exception près - si l'on fixe la difficulté liée au choix des chiffres des facteurs, la performance des élèves baisse quand on passe de la multiplication de deux entiers à celle d'un décimal par un entier puis à celle de deux décimaux où les fautes de virgule avoisinent 20% ; l'exception est le cas où l'entier multiplicateur a le chiffre zéro pour chiffre des unités.

Comment les élèves se trompent-ils au moment de placer la virgule du produit ? Il y a ceux qui l'oublient ou qui ne l'écrivent pas parce qu'ils ne sont pas sûrs de sa place. Certains comptent le nombre de décimales mais placent la virgule au produit en comptant les chiffres de gauche à droite et non de droite à gauche. Des élèves alignent les chiffres (les unités sous les unités...) quand ils posent la multiplication et placent la virgule comme s'il s'agissait d'une addition ; on remarquera que cette disposition des chiffres est inévitable lorsque les facteurs ont le même nombre de décimales et qu'on termine toujours une multiplication par une addition, celle des produits partiels. Lorsque les deux facteurs n'ont pas le même nombre de décimales, notamment lorsque le multiplicateur en a une de plus que le multiplicande, certains élèves, comme dans une addition, complètent

[151] IREM de Nice & CDDP de la Haute Corse (1981), *Le nombre décimal,* Bastia : CDDP de la Haute Corse.

[152] Tous les pourcentages se réfèrent à l'effectif total des élèves.

mentalement par un zéro pour obtenir le même nombre de décimales, calculent avec ce zéro mais ne le comptabilisent pas au moment de placer la virgule [153] :

			3,	5	0
*			4,	2	5
		1	7	5	0
		7	0	0	•
1	4	0	0	•	•
1	4	8,	7	5	0

Les évaluations ci-dessus permettent encore de montrer que s'il n'apparaît pas, dans l'utilisation des tables de multiplication, deux facteurs supérieurs à 5, alors la « taille » des chiffres ne contribue pas aux erreurs des élèves. Le fait que le multiplicande et le multiplicateur aient ou non le même nombre de décimales (à condition qu'ils en aient) ne contribue pas non plus à une variation des performances des élèves. Ni encore le fait que le multiplicateur soit inférieur à 1.

Tous ces résultats contribuent à expliquer le changement de programme : la multiplication de deux décimaux pose des difficultés techniques aux élèves pour le calcul du produit, en particulier la gestion de la virgule, difficultés qui surgissent notamment lorsqu'on passe de la multiplication d'un décimal par un entier à celle de deux décimaux.

Les problèmes issus de situations multiplicatives

Pour terminer cette approche des difficultés des élèves, nous allons examiner celles qu'ils rencontrent pour résoudre un problème issu d'une situation multiplicative. Afin de ne pas entrer dans une étude d'autres difficultés, nous nous restreindrons aux problèmes que l'on peut résoudre en effectuant une et une seule opération : une multiplication. En classe, les élèves rencontrent aussi des problèmes de complexité plus grande.

- *Produit de deux entiers ou d'un décimal par un entier*
- EVA6,91 & 95 (situation d'isomorphisme de grandeurs)

> A la récréation de 10 heures, 83 petits pains ont été vendus par un groupe de 4 élèves. Chaque petit pain a été vendu 3F. Quel est le montant de cette vente ?

en 91 Réussite 81,2%, utilisation d'une donnée parasite : 3,4%
en 95 Réussite 75,9%, utilisation d'une donnée parasite : 13,1%

- EVA6,95 & 97 (situation d'isomorphisme de grandeurs)

> Un carton d'eau minérale contient 6 bouteilles de 1,5 litre.
> Le magasinier range 25 de ces cartons sur son rayon.
> Indique par une croix l'opération qui convient pour trouver le nombre de bouteilles rangées.

25 + 6	25 * 6	1,5 * 6	25 - 6	25 * 1,5	6 - 1,5
☐	☐	☐	☐	☐	☐

[153] Nous avons souligné le zéro qui n'est pas écrit par l'élève mais dont il tient compte pour calculer.

en 95 Réussite 77,6%, réponse faisant intervenir 1,5 : 16,6%
en 97 Réussite 80,2%, réponse faisant intervenir 1,5 : 15,0%

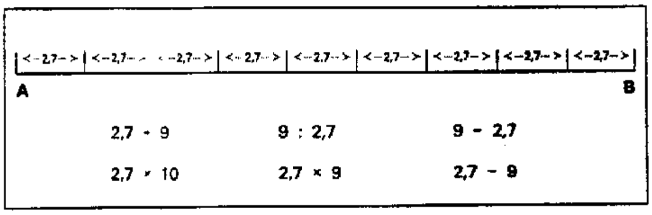
- EVA6,92 (situation d'isomorphisme de grandeurs)

  On achète 7,20 m de fil électrique à 4 F le mètre.
  Combien a-t-on payé ?

Réussite 69,4% Traitement séparé partie entière / partie décimale (28,20) : 2,8 %

- EVA6,94 (addition réitérée)

  Entoure l'opération qui permet de calculer la distance de A à B dans chacun des cas suivants :



Réussite 76,4 %

- EVAPM6, 97 (en fin de sixième, situation d'isomorphisme de grandeurs)

  Un ticket de cantine coûte 14,75 F.
  Quel est le prix d'un carnet de 10 tickets ?

Réussite 82 %. Et 7 % des élèves répondent 140,75 F

Ces exemples montrent une bonne reconnaissance du modèle multiplicatif dans le cas d'une situation d'isomorphisme de grandeurs où l'une d'entre elles a pour valeur un nombre entier. Toutes ces situations sont interprétables avec le modèle de l'addition réitérée. Voyons quelques résultats qui concernent le calcul de l'aire d'un rectangle, pour les autres situations multiplicatives, nous ne disposons pas de sources issues des évaluations nationales déjà citées. Nous interprétons cette absence comme le témoignage du fait que l'institution scolaire privilégie, dans l'enseignement, les situations d'isomorphisme de grandeur et de calcul d'aire de rectangles.

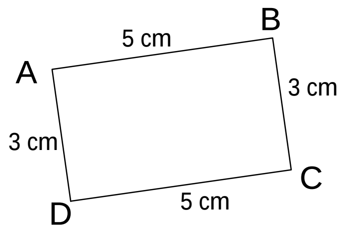
- EVA6,93 (aire d'un rectangle)

  Un terrain a la forme d'un rectangle. Les dimensions sont
  longueur : 60 m
  largeur : 40 m
  Quelle est l'aire de ce terrain ?

Réussite (réponse 2 400 m² ou 2 400) : 38,5%
Erreur d'unité de mesure (2 400 m) : 4,6%

• EVA6,95 & 97 (aire d'un rectangle)

Voici le rectangle ABCD



L'aire du rectangle est........ cm²

en 95 Réussite 29%, confusion avec le périmètre (réponse 16) : 35,4%
en 97 Réussite 27,3%, confusion avec le périmètre (réponse 16) : 34%

Ces deux exercices montrent que l'association entre l'aire du rectangle et la multiplication des côtés n'est acquise que par un tiers environ des élèves à l'entrée en sixième. La confusion avec le périmètre existe, elle est renforcée dans le second exercice où les quatre mesures sont indiquées, ce que certains élèves interprètent peut-être comme une invitation à les utiliser toutes. La faiblesse de ces résultats laisse à penser que le choix d'activités de calculs de l'aire de rectangles pour faire travailler les élèves sur la multiplication se heurte à l'importance de la durée nécessaire à l'acquisition de la notion d'aire. Les enseignants privilégieraient alors (comme les manuels) les situations d'isomorphisme de grandeurs et d'addition réitérée.

◆ *Produit de deux décimaux, reconnaissance du modèle*

Pour en terminer avec les difficultés d'apprentissage de la multiplication, abordons un point particulièrement important : la reconnaissance du modèle multiplicatif d'un problème lorsque les données sont décimales. Nous ne disposons, hélas, que d'un exercice d'évaluation de la résolution de problèmes conduisant à une multiplication de deux décimaux.

• EVA6,93 (repris d'une évaluation de 1980, *isomorphisme de grandeurs*)

J'achète 3,70 m de tissus à 9,50 F le mètre.
Combien dois-je payer ?

en 93 Réussite 35,2%, recours à une démarche multiplicative : 80,5%
en 80 Réussite 45,5%, recours à une démarche multiplicative : 77,5%

Ces chiffres montrent un écart important entre le recours à la bonne démarche et l'obtention du résultat attendu. Les élèves identifient-ils la structure multiplicative même s'ils ne savent pas effectuer la multiplication ? C'est le cas de ceux qui, en 1993 (1980) apparaissent dans les 80,5% (77,5%) des élèves qui recourent à une démarche multiplicative et qui n'apparaissent pas dans les 35,2% (45,5%) qui réussissent le problème. Remarquons, sur cet exemple, une évolution qui peut sembler paradoxale : de 1980 à 1993 la reconnaissance du modèle multiplicatif progresse de 3% alors que la réussite au problème baisse de plus de 10%. En 1993, les élèves calculeraient plus mal qu'en 1980 mais cette baisse n'aurait pas d'influence sur la reconnaissance du modèle multiplicatif. Ces résultats, trop partiels pour qu'on puisse en tirer des généralités posent tout de même une question : la compétence technique contribue-t-elle ou non à la reconnaissance de la situation ? Cette indépendance entre l'habileté technique et la reconnaissance du modèle a été étudiée, en particulier par l'APMEP [154] :

> On peut penser, et cela est souvent affirmé dans le public, que la maîtrise des techniques opératoires classiques est une condition nécessaire à la maîtrise des situations de problèmes du domaine numérique. En fait toutes les études de dépendances et de corrélation conduisent à infirmer fortement cette idée.
>
> La place manque pour développer cette question. Nous donnerons simplement deux exemples en insistant sur le fait qu'ils sont généralisables :
>
> • Les réussites aux items C25 (effectuation d'un produit) et P32 (résolution d'un problème multiplicatif) sont indépendantes.
>
> *Rappelons que cela signifie qu'un élève qui a réussi C25 n'a pas plus de chance de réussir P32 qu'un élève qui aurait échoué à C25.*
>
> • Les réussites aux items C25 (effectuation d'un produit) et C29 (produit d'un nombre par une fraction) sont indépendantes. Ce dernier point tend à montrer que la dépendance n'est même pas assurée lorsqu'on passe d'un type d'algorithme à un autre.

L'institution pose les mêmes questions [155] :

> D'un point de vue utilitaire, on peut se demander si une bonne capacité à effectuer des calculs par écrit est un objectif important aujourd'hui, alors que l'on a toujours une machine à portée de main. Dans ces conditions, il peut apparaître que les connaissances vraiment utiles aujourd'hui soient d'une part le sens des opérations à effectuer, d'autre part le contrôle des ordres de grandeur par du calcul mental approché.

Pourtant, l'indépendance entre la reconnaissance du modèle et l'habileté opératoire ne semble pas si claire. Les recherches, plus récentes que celles de l'APMEP, menées par Denis Butlen & Monique Pézard [156] sur les rapports entre l'habileté calculatoire et la « prise de sens » dans la résolution de problème ont donné des résultats plus nuancés. Une amélioration de la résolution de problèmes numériques est parfois obtenue par une meilleure habileté calculatoire, cela dépend de la structure des problèmes - additive ou multiplicative -, de la

[154] APMEP (1991), *Evaluation du programme de mathématiques - Sixième 1989 – Cinquième 1990,* Paris : APMEP. [p. 48].

[155] DEP (1996), *Evaluation CE2 - 6ème, Résultats nationaux Septembre 1995*, Paris : Ministère de l'Education nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, Direction de l'évaluation et de la prospective. [p. 149].

[156] BUTLEN D. & PEZARD M. (1996), *Rapports entre habileté calculatoire et « prise de sens »dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire,* Cahier de DIDIREM n°27, Paris : IREM de Paris 7.

complexité du problème et du type de résolution demandée - orale ou écrite. En ce qui concerne la multiplication, citons leurs conclusions [157] :

> Essayons de mesurer l'impact d'un entraînement au calcul mental sur la résolution *mentale* de problèmes en fonction du degré de complexité du problème posé. (...)
>
> En conclusion, nous allons essayer de préciser l'impact d'un entraînement au calcul mental sur la résolution *écrite* de problèmes selon le degré de complexité de la structure sous-jacente. (...)
>
> Un entraînement régulier au calcul mental semble donc avoir un impact positif lors de la résolution écrite d'une certaine catégorie de problèmes : ceux-ci doivent être relativement familiers aux élèves sans toutefois l'être trop ; leur degré de complexité ne doit être ni trop faible ni trop fort.
>
> La nature des erreurs concernées par cet impact dépend du degré de complexité du problème : quand la structure est simple, ce sont les erreurs de calcul et de données ; quand la structure est plus complexe, l'impact porte sur tous les types d'erreurs. Il ne porte sur la reconnaissance du modèle que dans les cas des structures additives complexes lorsque la passation s'inscrit dans une pratique régulière de calcul mental.

Citons enfin, pour illustrer des difficultés de reconnaissance du modèle multiplicatif, l'expérience avec un groupe d'élèves instituteurs (de formation Bac +3, c'est-à-dire correspondant actuellement à des étudiants en première année d'IUFM préparant le concours de Professeur des Ecoles) réalisée par Marie-Alix Girodet [158] :

> Nous avons demandé, au cours d'une tâche où il s'agissait de vérifier la facture ci-après, de lire les donnés, puis de contrôler le prix à payer en calculant mentalement un ordre de grandeur puis en donnant le résultat exact à l'aide d'une calculatrice.

BOEUF MERLAN
CODE 135

SATISFAIT OU REMBOURSÉ

A consommer avant le
22 **fev** 86

Prix Unitaire	Poids net	Prix à payer
69,90 F/kg	0,284 kg	19,85 F

EMB 92800 La Défense

Tous ont lu sans difficulté la somme à payer : 19 francs 85, et le prix au kilo : 69 francs 90 centimes ou 6 990 (anciens) francs ; et les deux tiers ont bien lu 284 grammes. Mais le savoir « social » peut ici assister la compétence en calcul :

[157] *Ibid.* [pp. 23 et 30-31].

[158] GIRODET M.-A. (1996), *L'influence des cultures sur les pratiques quotidienne des calculs*, Paris : CREDIF ENS de Fontenay-St Cloud DIDIER.

quand on achète de la viande chez un boucher et que l'on paye environ 20 francs, on sait bien qu'il ne peut s'agir que de grammes. Certains ont d'ailleurs évoqué leur véritable expérience en remarquant qu'ils n'achètent jamais de viande à un prix aussi élevé.

> Un seul sujet réussit la tâche en totalité, effectuer une vérification par un ordre de grandeur puis calculer exactement le prix et noter l'arrondi effectué, la calculatrice affichant 19,8516. Quatre arrivent à en réaliser une partie.
>
> Deux élèves instituteurs sur trois sont en difficulté :
>
> « Alors un kilo donc mille grammes coûte 69 francs 90. Euh ! alors je vais avoir 1000 divisé par 284, je vais voir combien cela fait.
>
> - Prenez la calculatrice.
> - Alors pour voir si le prix est exact je divise 69,90 par 3,52 (1000 ÷ 284 = 3,52) et je trouve 19 francs 90. »
>
> « Euh ! on peut faire deux choses 0,284, je sais qu'il faut diviser ou multiplier. Elle tape sur la calculatrice 0,284 * 19,85 = et reste saisie du résultat affiché (5,6374). Elle recommence en tapant sur la calculatrice 284 * 19,85 = 5 637,4. Elle semble encore plus étonnée.
>
> - Vous ne croyez pas que vous faites quelque chose qui ne va pas ?
> - Si, si, c'est clair. Euh ! pourtant, je l'ai fait cela, en plus. Pourquoi je ne comprends plus ! »

Les difficultés rencontrées par ces étudiants montrent qu'ils ne mettent pas en fonctionnement la structure multiplicative de ce problème de prix. Ils l'auraient certainement mieux reconnue si le poids net avait été de 3 kg, ce qui laisse à penser que le prolongement aux valeurs décimales n'est pas facile. Surtout, comme c'est le cas ici, lorsque le décimal choisi est inférieur à 1, ce qui donne un prix à payer inférieur au prix initial et ce qui peut induire un calcul par division ou par soustraction. Comme le fait remarquer l'auteur, la bonne lecture des données ne témoigne pas nécessairement d'une bonne lecture des décimaux qui peuvent être perçus comme une variante d'écriture des nombres entiers. Le prolongement de la situation à des valeurs décimales ne suffirait pas à faire acquérir le prolongement de l'opération à des valeurs décimales notamment quand le multiplicateur est inférieur à 1. Cela explique sans doute la perplexité de l'étudiant : *« Pourquoi je ne comprends plus ! »*.

Conclusion : des difficultés qui portent sur la technique et sur le sens

La multiplication de deux nombres entiers est effectuée avec succès par environ trois élèves sur quatre, cette proportion étant modulée suivant le choix de certaines variables comme la présence d'un zéro au multiplicateur ou la nécessité d'utiliser un produit de deux facteurs supérieurs à cinq de la table de multiplication. Nous avons retrouvé approximativement cette proportion pour la multiplication d'un décimal par un entier ou pour la division par dix d'un nombre entier compris entre cent et mille alors que le résultat est un nombre décimal.

Les questions qui portent sur des multiplications de deux décimaux ne sont réussies que par 35 % à 55 % des élèves. Les compétences techniques sont donc moins bien acquises avec les nombres décimaux. Ces résultats pourraient surprendre quiconque limiterait ce prolongement de la multiplication d'un décimal par un entier à la multiplication de deux décimaux à une affaire de comptage de décimales... Ils montrent, au contraire, que les difficultés concernant les nombres décimaux (qui sont eux-mêmes moins bien acquis que les nombres entiers à l'entrée en sixième) surgissent au moment de placer la virgule du produit. Il semblerait donc que la tâche du professeur de sixième soit importante s'il souhaite atteindre l'objectif fixé par les programmes : la compétence « multiplier deux nombres décimaux » est exigible.

De l'analyse des questions qui portent sur la reconnaissance du modèle multiplicatif dans différentes situations, et des productions des élèves, nous dressons trois constats différents.

Le premier constat est que deux types de situations seulement sont évaluées : les situations d'isomorphisme de grandeurs et le calcul de l'aire d'un rectangle. L'institution légitime - t - elle que l'enseignement se limite à ces situations ou bien se dessine - t - il un objectif du collège : élargir le sens de la multiplication ? Nous n'avons trouvé aucune réponse dans les programmes.

Le deuxième constat est que le calcul de l'aire d'un rectangle est une source de difficultés pour plus de la moitié des élèves qui confondent l'aire et le périmètre ou bien leurs formules respectives. Cette faible performance correspond-elle à un manque de formation des élèves ou à une difficulté d'acquisition ? Toujours est - il que de tels résultats ne peuvent être sans conséquence sur les choix d'un professeur pour enseigner la multiplication des décimaux : s'il programme une activité qui doit reposer sur une situation multiplicative et s'il souhaite que cette situation ne soit pas un obstacle au déroulement de la séance, alors il aura intérêt à ne pas choisir un calcul d'aire de rectangle qui le conduirait immanquablement à l'émergence de difficultés supplémentaires.

Le troisième constat est que, dans les situations multiplicatives, la dépendance entre la reconnaissance du modèle et la maîtrise technique semble globalement assez faible. Le manque de maîtrise technique handicape les élèves pour le calcul de la solution et ce d'autant plus qu'au collège les élèves sont moins sollicités qu'à l'école primaire pour poser leurs opérations, la calculatrice étant souvent utilisée. L'institution elle-même parait accepter une régression des compétences techniques des élèves à condition qu'ils apprennent à contrôler les résultats fournis par la calculatrice.

Les résultats obtenus, tant sur les décimaux que sur la multiplication, attestent que la tâche récemment confiée aux professeurs de sixième est importante. Il s'agit de compléter l'acquisition de la notion de nombre décimal, d'élargir le sens de la multiplication et d'enseigner une technique opératoire sur laquelle de nombreux élèves trébuchent. La combinaison des difficultés d'apprentissage à ces trois niveaux (nombre décimal, sens de l'opération et technique opératoire) constitue une contrainte sur l'enseignement qui peut être présente chez les enseignants dès la préparation des cours. Une autre contrainte est l'intégration de cet enseignement dans la progression annuelle compte tenu du reste du programme et des moyens horaires disponibles, nous allons l'étudier maintenant.

2. Intégration de l'enseignement de la multiplication des décimaux dans une progression annuelle

La tâche prescrite au professeur est définie par le programme : un contenu mathématique associé à des compétences que les élèves doivent acquérir. Un document d'accompagnement précise les intentions de l'institution scolaire afin d'aider les professeurs à programmer leur enseignement dans « l'esprit » du programme. La nécessité de ces documents montre que la tâche du professeur est complexe. L'institution lui laisse la responsabilité de concevoir un enseignement (une procédure de réalisation de la tâche prescrite) qui permettra d'atteindre le but qu'elle lui a fixé. Le professeur de mathématiques décide, en particulier, de l'ordre dans lequel il traitera les différentes notions au programme ainsi que de la durée de l'enseignement de chacune d'elles [159].

On distingue, en ergonomie, les tâches pour lesquelles la procédure de réalisation peut être finement décrite par le prescripteur de celles, qu'on appelle mission, qui sont seulement définies par leur but [160]. Dans l'enseignement, le but n'est pas seulement celui que le professeur doit atteindre, le but comprend aussi des acquisitions de savoir par les élèves au terme de l'année en cours ainsi qu'à moyen terme. D'une part l'institution définit les thèmes qui seront traités en précisant éventuellement quelques pratiques auxquelles les élèves doivent être habitués comme le calcul écrit, le calcul mental, la recherche... Tout cela relève bien de l'activité professionnelle de l'enseignant. D'autre part, l'institution fixe des compétences exigibles en fin d'année ou en fin de cycle. Ces compétences sont celles qui doivent être acquises par les élèves, elles ne définissent pas l'activité de l'enseignant mais imposent une contrainte d'efficacité.

Le professeur doit donc comprendre le programme c'est-à-dire reconstituer le plus précisément possible, à partir de ce texte, la tâche qui lui est prescrite. Les documents d'accompagnement peuvent l'y aider mais aussi les stages de formation continue et les manuels qui proposent chacun une reconstitution possible de la tâche du professeur. Toutefois, la reconstitution reste partielle puisque le professeur doit encore choisir parmi les propositions des auteurs : il n'est pas envisageable, au collège, avec les horaires prévus, d'exploiter toutes les activités proposées dans un manuel de mathématiques. Afin d'évaluer les contraintes que le programme impose à l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux en classe de sixième, nous allons examiner la place que lui réserve l'institution, c'est-à-dire à la fois où cette notion apparaît dans les programmes et quelle est sa fonction dans les activités mathématiques correspondantes. Nous comparerons nos résultats à ceux qui émergent des choix des auteurs des manuels scolaires. Puis nous déterminerons les projets que les professeurs pourraient élaborer pour

[159] Nous précisons ici la discipline car certains programmes d'autres disciplines indiquent l'ordre et la durée à respecter pour traiter chacune des notions.

[160] LEPLAT J. (1997), *Regard sur l'activité en situation de travail - Contribution à la psychologie ergonomique*, Paris : PUF. [p. 21.]

enseigner la multiplication des décimaux en sixième en tenant compte des résultats que nous avons obtenus jusqu'ici.

21. L'objet multiplication des décimaux dans l'ensemble du programme

Nous allons repérer, dans l'ensemble du programme de la classe de sixième du 22 novembre 1995, où apparaît la multiplication des décimaux et quelle est sa fonction. Cette analyse permettra de déterminer la tâche qui est prescrite aux enseignants et de dessiner les premiers contours des enseignements possibles. Autrement dit, nous cherchons à définir quel est, dans la période qui concerne notre étude, le rapport institutionnel à l'objet multiplication des décimaux. Pour atteindre cet objectif nous allons procéder à une approche écologique au sens de Yves Chevallard [161]

> Les écologues distinguent, s'agissant d'un organisme, son habitat et sa niche. Pour le dire en un langage volontairement anthropomorphe, l'habitat, c'est en quelque sorte l'adresse, le lieu de résidence de l'organisme. La niche, ce sont les fonctions que l'organisme y remplit : c'est en quelque façon la profession qu'il y exerce.

Nous avons donc fixé l'habitat de l'objet multiplication des décimaux (le programme de sixième) et nous allons examiner sa niche. Ce programme est rédigé en trois parties. La première précise les objectifs généraux, la seconde décrit l'organisation de l'enseignement et la troisième explicite les contenus et les compétences exigibles. C'est dans cette troisième partie que nous allons chercher où il est question de multiplication des décimaux et quelle est sa fonction. Les savoirs y sont organisés autour de trois thèmes : les *travaux géométriques*, les *travaux numériques,* l'*organisation et* la *gestion de données*.

La multiplication des décimaux, un outil pour les travaux géométriques

Dans le thème consacré aux *travaux géométriques*, la multiplication des décimaux n'est pas mentionnée. Elle figure néanmoins implicitement au paragraphe n°2 qui traite des surfaces planes : mesure, comparaison et calcul d'aires et de périmètres. Citons les compétences exigibles :

> Calculer l'aire et le périmètre d'un rectangle.
> Evaluer, à partir du rectangle, l'aire d'un triangle rectangle.
> Calculer la longueur d'un cercle

Le fait qu'elle ne figure pas explicitement laisse penser que les auteurs des programmes n'envisageaient pas, lors de la rédaction, le calcul d'aire de rectangles comme une activité qui donne du sens à l'objet multiplication mais comme une activité qui permet la mise en fonctionnement du caractère outil de cet objet mathématique.

La multiplication des décimaux pour apprendre le sens de l'écriture décimale

Dans le paragraphe *Nombres entiers et décimaux : écriture et opérations*, on peut lire, avant le titre *Techniques opératoires*, deux compétences exigibles :

---

[161] CHEVALLARD Y. (1994), *Op. cit.* [p. 142.]

> Utiliser l'écriture décimale et en connaître le sens.
> Multiplier et diviser un décimal par 10 ; 100 ; 1000
> ou par 0,1 ; 0,01 ; 0,001.

Un commentaire précise : « *La multiplication et la division par une puissance de dix sont à relier à des problèmes d'échelles ou de changements d'unités* ». L'absence d'indication quant au niveau de maîtrise technique laisse à penser qu'une maîtrise parfaite doit être visée. La place de cette multiplication dans le programme indique l'intention de ses auteurs : elle ne doit pas être conçue comme une technique opératoire mais être enseignée et pratiquée en relation la plus étroite possible avec le sens de l'écriture décimale. Nous avons vu qu'une multiplication par 10, 100 ou 1000 est réussie suivant le choix du multiplicande par 95 % à 50 % des élèves ; une division par 10, 100 ou 1000 par 80 % à 30 % d'entre eux. Il semble donc que ces activités opératoires et l'acquisition du sens de l'écriture décimale soient pensées par l'institution comme allant de pair, l'une profitant à l'autre et réciproquement.

Cette relation est confirmée par les documents d'accompagnement des programmes :

> Les évaluations faites en 6e ont montré combien la signification des écritures décimales échappe encore à beaucoup d'élèves à l'entrée en 6e. Il est nécessaire de conduire un travail sur la signification de l'écriture décimale et de la relier au travail sur les opérations et à la multiplication et la division par 0,1 ; 0,01 ou 0,001.

La fonction de ces multiplications est donc double, être un outil pour répondre à des problèmes d'échelles ou de changements d'unités mais aussi être un moyen, comme doit l'être en général le travail sur les opérations, pour apprendre la signification de l'écriture décimale.

On retrouve implicitement ces multiplications dans le paragraphe consacré à l'extension des écritures fractionnaires aux quotients de décimaux. Une autre fonction de ces multiplications est de permettre des modifications d'écritures comme $\frac{5,24}{2,1} = \frac{524}{210}$.

<u>La multiplication, un outil pour résoudre des problèmes numériques</u>

Dans la deuxième partie, consacrée aux *travaux numériques*, la multiplication des décimaux apparaît explicitement mais aussi implicitement dans les passages relatifs à la résolution de problèmes et au calcul numérique. Le préambule précise :

> Cette partie du programme s'appuie principalement sur la *résolution de problèmes*. (...) ces problèmes doivent permettre aux élèves, en continuité avec l'école élémentaire, d'associer à une situation concrète un travail numérique et de mieux saisir le *sens des opérations* et des équations figurant au programme.

Ce paragraphe du programme porte sur les *nombres entiers et décimaux : écriture et opérations*. Avant d'aborder les compétences exigibles, les commentaires précisent les limites de ces compétences : « *On tendra ainsi à ce que la maîtrise des techniques opératoires devienne suffisante pour ne pas faire* *obstacle à la résolution de problèmes.* » Une fonction des opérations est définie : être un outil pour la résolution de problèmes. Nous reviendrons plus longuement sur cette fonction quand nous envisagerons comment le professeur peut la traduire dans son enseignement.

La multiplication des décimaux, une technique à connaître

L'apprentissage de la technique opératoire est prévu dans des situations suffisamment simples, l'utilisation de la calculatrice fait partie des compétences techniques prescrites :

> Addition, soustraction et multiplication : savoir effectuer ces opérations sous les trois formes de calcul (mental, à la main, à la calculatrice), dans des situations n'exigeant pas de virtuosité technique.

Les programmes excluent donc que la multiplication des décimaux provoque l'apparition de séances répétées de calculs à la main sauf éventuellement si les élèves éprouvaient des difficultés « *avec les nombres courants et pour des opérations techniquement simples.* »

En conclusion, rappelons que le travail sur la technique opératoire doit permettre une maîtrise suffisante pour la résolution de problèmes. Son apprentissage doit contribuer à l'acquisition de l'écriture décimale. On remarquera qu'aucune mention n'est faite des propriétés algébriques de l'opération sur lesquelles repose pourtant la technique opératoire.

La multiplication des décimaux et les fractions décimales

Les compétences exigibles sur les fractions décimales ne concernent pas les opérations mais les changements d'écriture. Toutefois, les commentaires suggèrent que les opérations sur les nombres décimaux soient abordées avec les deux types d'écriture :

> Les écritures fractionnaires et décimales pourront être utilisées comme des moyens de contrôle mutuel des opérations sur des nombres décimaux. C'est dans ce seul cas que seront rencontrées les opérations (+, -, *) en écriture fractionnaire telles que $\frac{32}{10} + \frac{7}{100} = \frac{327}{100}$.

Une nouvelle fonction de la multiplication des décimaux est ici définie dans le programme, c'est un outil pour vérifier les multiplications de deux fractions décimales.

La multiplication des décimaux et la gestion de données

Dans l'*organisation et* la *gestion de données*, on retrouve implicitement la fonction de la multiplication des décimaux « être un outil pour résoudre les problèmes numériques. » Les situations à l'origine de ces problèmes sont énumérées : l'application d'un pourcentage, l'usage des opérateurs constants de la calculatrice, le calcul de l'aire d'un rectangle et enfin celui de la longueur d'un cercle puisque c'est une approximation décimale de π que les élèves utilisent.

*Bilan : fonctions de la multiplication des décimaux dans le programme de 6^e^*

Pour conclure cette approche écologique de la multiplication des nombres décimaux dans le programme de sixième, nous remarquerons que la « niche » est répartie dans les trois parties du programme (travaux géométriques et numériques, gestion de données) et que sa « fonction » est multiple. Ainsi, nous distinguons, dans le programme de sixième, neuf fonctions de la multiplication des décimaux (ces fonctions sont indiquées entre parenthèses dans la liste qui suit) ; plusieurs d'entre elles peuvent être regroupées dans une fonction plus vaste d'apprentissage du nombre décimal :

- contribuer à l'apprentissage des nombres décimaux :

Les multiplications par 10, 100, 1 000 ou 0,1, 0,01, 0,001... permettent de travailler les unités et les changements d'unités le système décimal (1), les écritures fractionnaire (2) et décimale (3) ;

La technique opératoire permet de travailler les écritures fractionnaires par le calcul sur les fractions décimales (4) et de travailler l'écriture décimale (5) ;

La lecture des données d'un problème multiplicatif et l'écriture de la solution nécessitent parfois d'effectuer des changements d'unité (6), l'estimation de la solution demande de déterminer les ordres de grandeur de ces données (7) ;

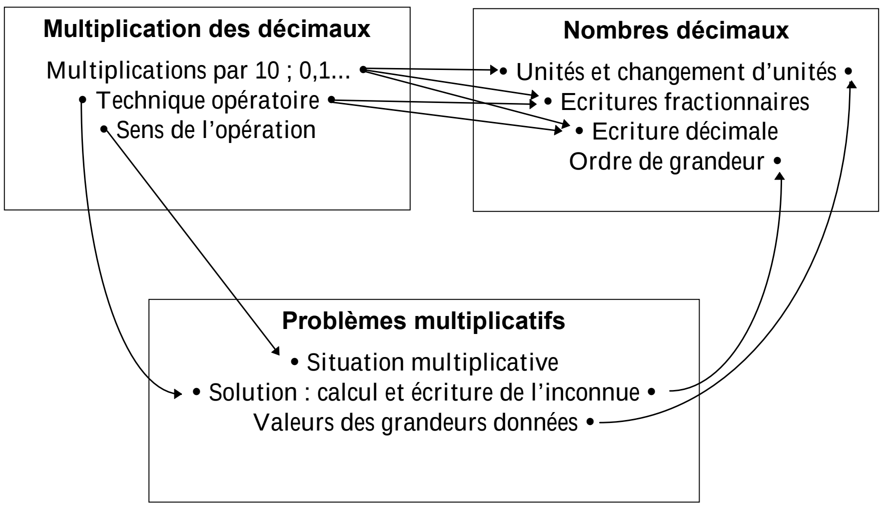
- modéliser certaines situations qui donnent du sens à la multiplication :

L'élaboration du sens de la multiplication repose sur l'étude de situations multiplicatives et les connaissances construites lors de cette étude sont réinvesties pour résoudre les problèmes numériques lorsque la résolution passe par le calcul d'un produit (8) ;

- calculer la solution de problèmes numériques :

La technique opératoire permet de calculer la solution de problèmes multiplicatifs (9).

Ces neuf fonctions de l'étude de la multiplication des nombres décimaux dans le programme de la classe de sixième sont indiquées dans le schéma suivant où, conformément au programme nous distinguons les nombres, l'opération et les problèmes qui conduisent à l'opération.



Graphique 1. Les neuf fonctions de la multiplication des décimaux dans le programme de sixième

L'opération, les problèmes et les nombres sont l'objet de différents points du programme :

- Pour l'opération, nous avons distingué les cas particuliers que sont les multiplicateurs égaux à 10 ; 100 ; 1 000 ; 0,1 ; 0,01 ; 0,001... la technique opératoire usuelle et le sens de l'opération.
- Pour les problèmes multiplicatifs, nous avons distingué la situation (des situations multiplicatives apparaissent dans les trois parties du programme : travaux géométriques, travaux numériques et gestion de données), les données et la solution qui peut s'obtenir par des méthodes artisanales ou par l'utilisation de la technique opératoire.
- Pour les nombres décimaux, nous avons distingué quatre aspects différents mais liés : les unités et les changements d'unités, les écritures fractionnaires, l'écriture décimale et l'ordre de grandeur.

Enfin, chaque flèche représente une des neuf fonctions de l'objet multiplication des décimaux dans le programme de sixième de 1995.

22. L'objet multiplication des décimaux dans les manuels de sixième

Les professeurs utilisent les programmes mais plus encore les manuels scolaires. Comparons la niche et les fonctions de la multiplication des décimaux dans les manuels de cette classe avec celles que nous venons de déterminer dans les programmes de sixième.

La niche de la multiplication des décimaux dans les manuels de sixième

Changeons d'*habitat* pour l'objet multiplication des décimaux, quelle est sa *niche* dans les manuels ? Ces ouvrages sont tous rédigés en reprenant le plan du programme, chacune des notions y est abordée. Ainsi, la niche est la même dans les manuels et dans le programme de sixième.

Les fonctions de la multiplication des décimaux dans les manuels de sixième

Reprenons les conclusions de l'étude que nous avons menée sur les propositions des auteurs de ces ouvrages. Les trois grandes fonctions que nous avons identifiées dans les programmes correspondent aux catégories que nous avions dégagées pour comparer les manuels. Nous avions dressé un tableau des exercices qu'ils proposent, les catégories qui nous permettaient de distinguer ces exercices étaient : *détermination du produit*, *questions théoriques* et *situations multiplicatives*. Nous trouvons la correspondance suivante :

- la fonction de contribution à l'apprentissage des nombres apparaît dans les exercices des *questions théoriques* et dans les exercices de calcul mental de la catégorie *détermination du produit* ;
- la fonction de modélisation de situations apparaît dans les exercices des *situations multiplicatives* ;
- la fonction de calcul de la solution de problèmes numériques apparaît dans les exercices de technique opératoire et d'ordre de grandeur de la catégorie *détermination du produit*.

Les résultats quant à l'importance accordée à ces différentes fonctions ont montré une certaine hétérogénéité des manuels scolaires. Deux fonctions ne sont vraiment exploitées dans aucun de ces ouvrages : l'utilisation des ordres de grandeurs ou des fractions décimales pour aider à l'apprentissage de la multiplication. Il faut rappeler que, dans les programmes ces deux fonctions n'apparaissent pas explicitement comme telles, les ordres de grandeurs servent à contrôler les résultats (mais comment apprend-on à manipuler les ordres de grandeurs ?), et les opérations sur les décimaux servent à contrôler celles qui sont effectuées avec les fractions décimales. En outre, nous avons constaté une certaine pauvreté des situations multiplicatives étudiées, celles qui apparaissent dans les chapitres qui ne sont pas directement consacrés à la multiplication des décimaux ne sont pas exploitées pour retravailler le sens de la multiplication mais seulement pour utiliser la technique opératoire. Aussi, l'évaluation de l'importance de l'étude de ces situations sur l'apprentissage du sens de la multiplication reste difficile.

Finalement, les manuels ont, dans leur ensemble, attribué à l'objet multiplication des décimaux la même niche et les mêmes fonctions que les programmes. Mais cette apparente convergence ne doit pas masquer l'hétérogénéité, que nous avons constatée dans l'ensemble des manuels, due à la différence d'importance accordée par chacun d'eux à chacune de ces fonctions.

3. Quel projet élaborer compte tenu des contraintes ?

Terminons notre étude de la transposition didactique, en sixième, de la multiplication des nombres décimaux par la prise en compte, dans l'élaboration d'un projet d'enseignement, des connaissances antérieures des élèves et des demandes de l'institution scolaire. Prenons donc la place d'un professeur qui doit élaborer un projet pour enseigner cette notion dans sa classe. Nous en resterons aux grandes lignes de ce projet car ce professeur est fictif : il n'aurait pas d'autre particularité que d'avoir de l'expérience du métier, de devoir enseigner en classe de sixième de niveau standard en étant soumis aux exigences institutionnelles de l'enseignement public et en disposant des moyens qu'elle attribue.

Le programme distingue deux objectifs différents pour l'enseignement de la multiplication des décimaux : le sens de l'opération, indispensable pour la reconnaissance des situations dans les problèmes, et la technique opératoire, pour calculer la solution d'un problème. Ces deux directions de travail pour les enseignants peuvent être plus ou moins reliées dans le projet du professeur. En outre, l'enseignement de la multiplication doit permettre de compléter l'apprentissage du nombre décimal.

31. La technique opératoire dans le cas d'un enseignement décontextualisé

La technique peut être étudiée indépendamment du sens de l'opération, c'est le scénario proposé par tous les manuels scolaires. Le professeur pose le problème de trouver un résultat à la multiplication de deux décimaux après avoir éventuellement justifié cette question par une situation. Prenons par exemple le produit 3,4 * 4,75. L'enseignant peut créer une situation qui conduise à ce calcul ou demander aux élèves d'en produire. Nous supposerons dans ce paragraphe que le projet n'est pas d'utiliser la situation pour déterminer le produit. Le problème technique est résolu de façon abstraite, décontextualisée.

L'objectif est d'aboutir à la technique usuelle : calculer 34 * 475 et obtenir 16 150, compter trois décimales dans les deux facteurs du produit, puis placer une virgule après le chiffre 6, c'est-à-dire en laissant trois décimales après la virgule. Eventuellement simplifier l'écriture obtenue 16,150 en éliminant le zéro inutile et obtenir 16,15.

Rappelons rapidement les différents moyens qui permettent de justifier l'égalité : 3,4 * 4,75 = 16,15. Le professeur pourra développer un ou plusieurs d'entre eux.

Avec les fractions décimales

L'écriture fractionnaire des décimaux et la multiplication de deux fractions décimales sont des prérequis à un enseignement qui reposerait sur les fractions. Nous avons vu que les élèves éprouvent quelques difficultés à l'entrée en sixième avec les changements d'écriture des nombres décimaux. Ces difficultés pourraient disqualifier cette façon de procéder, néanmoins l'acquisition des pratiques de changement d'écriture étant un des objectifs de l'année de sixième, certains professeurs pourraient tout de même l'envisager :

$$3{,}4 * 4{,}75 = \frac{34}{10} * \frac{475}{100} = \frac{34 * 475}{1\,000} = \frac{16\,150}{1\,000} = \frac{1\,615}{100} = 16{,}15.$$

Remarquons que la technique usuelle peut se retrouver assez facilement à partir de ces égalités ce qui constitue un avantage. Le sens de l'écriture décimale est mobilisé. Néanmoins, rappelons que le programme envisage la multiplication des décimaux comme un moyen de contrôle du produit de deux fractions décimales, ce qui peut laisser à penser que la chronologie des enseignements envisagée par l'institution risque de ne pas être respectée. Aucun manuel ne procède ainsi.

Avec les unités de mesures

Rappelons que la méthode du changement d'unité consiste à transformer les facteurs du produit 3,4 * 4,75 en deux nombres entiers en changeant d'unité. Mais cette transformation s'effectue en relation avec les unités de mesure et le sens de la situation qui lie ces deux facteurs. Elle n'entre donc pas dans les projets où la technique précède la résolution de problèmes. Précisons néanmoins qu'aucun manuel ne procède ainsi.

Avec un encadrement du produit ou l'ordre de grandeur des facteurs

Nous avons vu que les programmes permettent d'envisager un enseignement de la multiplication en liaison avec les approximations et les ordres de grandeurs. Une telle méthode n'a pas encore été vue car elle n'apparaît dans aucune publication. On peut envisager néanmoins qu'un professeur présente le produit 3,4 * 4,75 comme celui de 34 dixièmes par 475 centièmes. On obtient alors 16 150 sous-unités qu'il faut déterminer. Cela revient à placer une virgule à 16 150 pour trouver le produit, ce qui est conforme à la pratique usuelle de la technique opératoire.

Sans utiliser la multiplication des fractions décimales, on peut proposer la recherche d'un encadrement du produit ou l'utilisation de l'ordre de grandeur du produit. Procédons par encadrement : le produit est compris entre 3 * 4 et 4 * 5 c'est–à–dire entre 12 et 20 donc 3,4 * 4,75 = 16,15. Avec les ordres de grandeurs : les facteurs ont pour ordre de grandeur 3 et 5 donc une estimation du produit est 15 ; parmi les nombres que l'on peut écrire en plaçant une virgule à 16 150, le plus proche de 15 est 16,15 donc 3,4 * 4,75 = 16,15 [162]. Ces méthodes visent conjointement l'objectif du contrôle des affichages de la calculatrice par le calcul approché. Aucun manuel ne procède ainsi.

Avec les opérateurs

La méthode utilisant l'effet sur le produit d'opérateurs multiplicatifs appliqués aux facteurs est la seule méthode exposée dans les manuels. Rappelons qu'elle repose sur la commutativité et l'associativité de la multiplication, ce qui est masqué par une disposition judicieuse :

3,4	*	4,75	=	???
↓ * 10		↓ * 100		↑ ÷ 1 000
34	*	475	=	16 150

On en déduit le produit cherché. Cette méthode a l'avantage de rendre compte aisément de la technique usuelle. L'inconvénient majeur est que les nombres obtenus par les opérateurs ne trouvent pas de signification dans la situation où interviennent les décimaux.

Avec l'écriture décimale

Une méthode reprend celle des fractions décimales mais sans imposer de changement d'écriture. Elle utilise implicitement la distributivité de la multiplication sur l'addition : on pose la multiplication et on l'effectue en attribuant une unité à chaque produit partiel. Cette méthode a l'avantage de permettre une révision de la multiplication d'un décimal par un entier et d'envisager la multiplication de deux décimaux sans changer de technique. Elle suppose que les élèves aient appris à multiplier entre elles les différentes unités : centièmes, dixièmes, unités, dizaines, centaines...

[162] La conclusion pose des difficultés théoriques qui sont étudiées en annexe, voir le chapitre intitulé : ordre de grandeur et multiplication des décimaux.

4,7 5	On commence par 4 * 5, on multiplie des dixièmes par des
* 3,4	centièmes donc on obtient 20 millièmes. C'est–à–dire
1,9 0 0	0 millième et 2 centièmes. On pose 0 millième et on retient
1 4,2 5	2 centièmes. 4 dixièmes * 7 dixièmes font 28 centièmes,
1 6,1 5 0	plus 2 centièmes de retenue qui font 30 centièmes...

Ainsi, la méthode restitue le sens de chaque produit partiel et de chaque chiffre des écritures décimales. Elle convient pour toutes les multiplications de décimaux, que les facteurs soient entiers ou non. Elle permet aussi de retravailler le sens de l'écriture décimale. Mais elle est assez lourde à utiliser pour un élève car elle impose de penser à beaucoup de choses à la fois et pourrait entraîner des erreurs dues à une surcharge cognitive...

Remarquons enfin que cette méthode met l'accent sur les chiffres du nombre alors que dans l'ensemble du programme du collège, les chiffres et leur valeur ne sont plus travaillés. Toutes les techniques opératoires qui sont étudiées (calcul fractionnaire, calcul algébrique, calcul sur les radicaux) portent directement sur les nombres. La seule exception est le critère de divisibilité par 2, 3 ou 5 qui fait explicitement mention des chiffres du nombre mais la valeur de ces chiffres n'est pas prise en compte puisque ce critère n'est pas établi. Cette méthode s'inscrit donc assez mal dans l'ensemble du programme du collège qui est précisément celui que les professeurs de sixième enseignent quelles que soient les autres classes qu'ils ont en charge [163].

Après avoir enseigné la technique opératoire, le professeur peut envisager de proposer des problèmes issus de situations multiplicatives. Si le professeur se limite aux problèmes d'isomorphisme de grandeurs, il sait que les élèves reconnaîtront assez facilement la situation multiplicative (c'est un résultat des évaluations nationales), ils n'auraient donc plus qu'à appliquer la technique opératoire pour résoudre le problème. Comme nous l'avons montré, à une exception près, ce choix est celui de toutes les équipes d'auteurs de manuel de sixième.

32. La technique opératoire enseignée à partir d'une situation multiplicative

Certaines propositions d'enseignement de la multiplication des décimaux ne ressemblent pas à celles des manuels. Leurs auteurs ne proposent pas d'élaborer une technique indépendamment des situations où intervient la multiplication. Bien au contraire, c'est la situation qui donne du sens à la technique opératoire. Cette démarche est conforme au programme. Les objectifs généraux [164] rappellent que la démarche d'enseignement doit être de « *bâtir des mathématiques à partir de problèmes rencontrés dans plusieurs disciplines et, en retour, d'utiliser des savoirs mathématiques dans les spécialités diverses* ». Ils ajoutent que la résolution de problème et le calcul permettent aux élèves « *de mieux prendre en compte le*

[163] Nous ne prenons pas en compte ici les rares professeurs dont le service est réparti à la fois dans un collège et dans un lycée.

[164] Programme de mathématiques de la classe de sixième, 22 novembre 1995.

caractère 'd'outil' des mathématiques ». Un projet qui reprendrait des propositions d'enseignement comprenant une phase contextualisée est donc envisageable par un professeur, bien qu'aucune d'entre elles ne soit relayée par les manuels.

Nous avons vu trois propositions qui envisagent la multiplication des décimaux comme un outil pour résoudre un problème s'appuyant sur une situation multiplicative, celles de Guy Brousseau, de Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin et de celle Milena Basso & Cinzia Bonotto. Les situations multiplicatives utilisées sont respectivement l'agrandissement de figures planes, le calcul d'aire de rectangles et les problèmes de prix. Rappelons comment ces situations permettent de construire la multiplication des décimaux.

Multiplication des décimaux dans le contexte des problèmes de prix

Les nombres décimaux qui interviennent dans les problèmes de prix sont des mesures. La méthode de calcul du produit repose sur des changements d'unités directement liés à la situation. Soit, par exemple, la question : combien paiera-t-on 3,4 mètres de ruban à 4,70 francs par mètre ? Les conversions 3,4 m = 34 dm et 4,70 F/m = 47 c/dm permettent de résoudre le problème avec des nombres entiers. Mais nous avons vu que cette méthode n'est pas efficace pour toutes les valeurs. Ici par exemple, si le prix du ruban est 4,75 F/m alors on achète 34 dm de ruban qui coûte 47,5 centimes par dm, on doit se contenter d'un seul facteur entier. La méthode n'est pas suffisante pour constituer une technique, elle ne conduit pas non plus à la technique usuelle qui serait simplement constatée pour des valeurs adaptées. Aucun manuel actuel ne procède ainsi.

Multiplication des décimaux dans le contexte du calcul d'aire de rectangles

Comme l'ont montré Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin, le calcul d'aire de rectangle peut être conduit en étudiant parallèlement la multiplication des décimaux écrits avec les fractions décimales ou avec la notation décimale. Une telle étude permet d'atteindre d'autres objectifs du programme de sixième comme le sens de l'écriture décimale en liaison avec les fractions décimales, le calcul d'aires et les conversions d'unités d'aires.

Nous avons montré que cette situation est la plus efficace pour illustrer les propriétés de la multiplication. Mais nous avons aussi montré que le calcul d'aire de rectangles pose des difficultés aux élèves à l'entrée en sixième, même quand les mesures des côtés sont des nombres entiers. Deux hypothèses contradictoires peuvent alors être formulées. Soit le professeur décide d'approfondir l'enseignement du calcul d'aire de rectangles et, il pourra bénéficier de cet investissement pour la multiplication des décimaux en la reliant à cette situation. Soit le professeur ne prend pas cette décision, et le calcul d'aire de rectangles apparaîtra plutôt comme une difficulté supplémentaire pour l'enseignement de la multiplication. Dans les manuels, le calcul d'aire de rectangle est un chapitre postérieur à celui de la multiplication des décimaux.

Multiplication des décimaux dans le contexte de l'agrandissement de figures

La situation d'agrandissement de figures planes fait intervenir des opérateurs multiplicatifs, la multiplication des décimaux provient soit de l'application d'un opérateur à une longueur soit de la composition de deux opérateurs. Les situations élaborées par Guy Brousseau ont inspiré de nombreuses publications parmi lesquels on trouve des ouvrages destinés à la formation initiale des enseignants mais aussi des propositions comme celles de la thèse de Jeanne Bolon ou celles que l'INRP a expérimentées et qui sont regroupées sous le titre *Apprentissages mathématiques en 6e* [165]. Dans ce dernier ouvrage, on trouve une activité analogue à celle d'un agrandissement d'une droite graduée que les auteurs appellent « *la bande à double graduation* ». Cette situation permet, et c'est la seule, de mobiliser la conception « abscisse » des nombres décimaux. Comme le montrent les auteurs, elle trouve de nombreuses applications pour modéliser des situations de proportionnalité.

Mais nous avons montré que ces situations avec des opérateurs multiplicatifs ne permettent pas facilement de justifier les propriétés de la multiplication. Si bien que ces situations contribuent principalement à construire un sens à la multiplication de deux décimaux ou rationnels, sens qui n'apparaît, dans le programme, qu'au paragraphe consacré aux situations de proportionnalité où l'utilisation d'une échelle est simplement signalée en commentaire mais n'apparaît pas parmi les compétences exigibles. Les travaux sur la notion d'échelle figurent plus explicitement au programme de la classe de cinquième, les professeurs pourraient estimer que ces situations sont donc bien coûteuses...

33. Retour au programme : maîtrise de l'opération et durée de l'enseignement

Les grandes lignes des projets que pourrait construire un professeur pour enseigner la multiplication des décimaux sont maintenant tracées. Pour que ce projet puisse être finalisé, il faut encore estimer le nombre d'heures de classe à lui consacrer qui dépend aussi du niveau de maîtrise recherché.

Pas de virtuosité technique

Le programme de sixième précise, à trois reprises, le niveau que le professeur doit viser [166] :

> Les travaux numériques prennent appui sur la *pratique du calcul exact ou approché* sous différentes formes : *le calcul mental, le calcul à la main (*dans le cas de nombres courants et d'opérations techniquement simples), *l'emploi de la calculatrice.* (...)
>
> On tendra ainsi à ce que la maîtrise des techniques opératoires devienne suffisante pour ne pas faire obstacle à la résolution de problèmes.
>
> (...) Addition, soustraction et multiplication : savoir effectuer ces opérations sous les trois formes de calcul (mental, à la main, à la calculatrice), dans des situations n'exigeant pas de virtuosité technique.

[165] INRP - ERMEL (1991), *Apprentissages mathématiques en 6e*, Paris : Hatier.

[166] Programme de mathématique de la classe de sixième, 22 novembre 1995.

Comment interpréter ces phrases ? L'institution déclare que son but n'est pas que les élèves dominent parfaitement la technique opératoire, sans préciser ce qui est acceptable que les élèves ignorent. Nous envisageons alors deux interprétations qui, *a priori*, ne sont pas incompatibles :

- l'institution aurait pour objectif que les élèves puissent résoudre les problèmes numériques sans utiliser la calculatrice, et alors d'une part ces problèmes doivent conduire à des calculs suffisamment simples techniquement et d'autre part la maîtrise technique des élèves doit permettre d'effectuer ces calculs ;
- ou l'institution supposerait l'existence d'une relation entre la maîtrise de la technique opératoire et la capacité à reconnaître l'opération dans une situation. Il existerait un seuil de maîtrise en deçà duquel la reconnaissance du modèle serait compromise. Alors le programme demanderait que la maîtrise des techniques opératoires soit supérieure à ce seuil (« *suffisante* ») pour ne pas faire obstacle à la reconnaissance de l'opération (« *à la résolution de problèmes* »). Le débat sur la relation entre technique opératoire et résolution de problème n'est pas clos. Les travaux de Denis Butlen & Monique Pézard y contribuent : ils montrent que la relation entre habileté opératoire et reconnaissance du modèle dépend de nombreux facteurs : résolution orale ou écrite, complexité de la situation, familiarité de la situation...

Les évaluations que nous avons citées ont montré que le modèle multiplicatif, dans des situations simples d'isomorphisme de grandeurs est reconnu par environ 80 % des élèves. La réussite au problème demande en outre que la multiplication soit juste. Or nous avons constaté que la réussite est d'environ 70 % pour un problème conduisant à la multiplication d'un décimal par un entier et de 40 % si la multiplication porte sur deux décimaux. Les professeurs qui utilisent les manuels où les situations multiplicatives sont presque uniquement des situations simples d'isomorphisme de grandeurs pourraient donc concevoir un enseignement où les problèmes conduisent à des calculs de niveaux variés, en permettant éventuellement l'usage de la calculatrice pour pallier les difficultés techniques de certains élèves.

Quelle durée pour cet enseignement ?

Le projet d'enseignement qu'un professeur peut élaborer dépend aussi de la durée dont il dispose. Pour évaluer cette durée, les enseignants peuvent utiliser les manuels. Le programme de l'année est couvert par une quinzaine de chapitres. Ainsi, accorder environ deux semaines de classe à chaque chapitre permet de traiter l'ensemble du programme. Suivant les manuels, la multiplication des nombres décimaux est un chapitre à part entière ou seulement la moitié quand elle est associée à l'addition et à la soustraction. Les programmes prévoyant trois heures hebdomadaires, nous pouvons évaluer la durée de l'enseignement de la multiplication (y compris la résolution de problèmes) dans une fourchette de quatre à six heures (évaluation comprise).

Si le professeur élabore un projet conforme à ceux des manuels, il consacrera deux à quatre heures à la technique opératoire et aux relations entre cette technique et la numération décimale. La multiplication des fractions décimales pourra être reportée. Il consacrera encore trois heures environ aux résolution de problèmes pour enrichir le sens de l'opération et la connaissance des situations courantes (grandeurs, unités, relations entre les grandeurs...) Si le professeur élabore un projet d'enseignement comprenant une phase contextualisée, il doit recomposer différent chapitre du manuel ou travailler sans l'utiliser, ce qui n'est pas facile. Nous ne pouvons pas dans ce cas prévoir de répartition car les propositions étudiées peuvent être reprises ou adaptées en toute liberté par un professeur comme en témoignent les suggestions que Jeanne Bolon a élaborées dans sa thèse et qui reprennent les travaux de Guy Brousseau et de Régine Douady & Marie-Jeanne Perrin .

CONCLUSION

Des problèmes posés par la formation des enseignants [167] nous ont conduit à l'analyse *a priori* de l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux. Nous disposions d'une grande richesse de travaux sur l'enseignement des nombres décimaux ou sur la multiplication car ces notions ont suscité de nombreuses recherches [168]. Nous les avons utilisés pour déterminer les enjeux d'apprentissage de ces deux notions. Nous avons étudié les propositions d'enseignement qui figurent dans les diverses publications. En croisant les résultats obtenus avec les compétences des élèves sur les notions liées à la multiplication des décimaux d'une part et les programmes actuels ou passés d'autre part, nous avons pu cerner l'éventail des possibles pour cet enseignement.

La multiplication des nombres décimaux, quels enjeux mathématiques ?

Les nombres décimaux et leurs écritures

Les nombres décimaux sont utilisés pour résoudre trois types de problèmes. Des problèmes algébriques parce qu'ils permettent la résolution de certaines équations du type $ax = b$ (où $a \in$ É et $b \in$ É) sans solution dans l'ensemble des entiers naturels. Des problèmes de mesure parce qu'ils permettent l'approximation de tout nombre de la droite numérique (de tout réel) avec une précision quelconque et en particulier toutes les solutions aux équations évoquées précédemment. Des problèmes techniques parce qu'ils permettent aisément les comparaisons et les opérations. Les rationnels répondent, mieux encore que les décimaux, au problème algébrique mais posent des difficultés techniques. Ainsi, le nombre décimal peut-il être conçu comme un rationnel particulier ou, inversement, l'ensemble des rationnels peut-il venir prolonger celui des décimaux.

En tant que nombre rationnel, le nombre décimal peut être considéré comme une mesure (la grandeur et l'unité étant commensurables), comme un rapport de

[167] Nous avons constaté que des professeurs (à l'école et au collège) restent démunis face à des erreurs persistantes de leurs élèves à propos des nombres décimaux et de leur multiplication.

[168] Nous pensons notamment à Brousseau N. & G. (1987), Brousseau G. (1998), Douady R. & Perrin M.–J. (1986), Vergnaud G. (1981, 1983), Rogalski J. (1985).

deux grandeurs (dans des situations de comparaisons) ou comme un opérateur (le coefficient d'une application linéaire). Indépendamment des rationnels, les nombres décimaux peuvent être considérés comme des abscisses de points qui viennent enrichir la demi - droite numérique graduée d'unité en unité (ils permettent alors des mesures de longueurs ou des approximations décimales des réels positifs). En référence au système métrique, les décimaux permettent d'effectuer facilement des conversions d'unités.

Aux nombres décimaux sont associées différentes représentations écrites, les programmes actuels prévoient l'enseignement de cette multiplicité de sens et de représentations ainsi que les changements d'écriture : fractions, fractions décimales, somme de fractions décimales, écriture à virgule, écriture sous la forme d'un produit [169]. Un vocabulaire spécifique est associé à l'écriture à virgule qui permet d'indiquer la valeur de chaque chiffre dans l'écriture du nombre.

Nous constatons cependant une certaine carence des programmes actuels concernant l'enseignement des grandeurs familières au profit de l'enseignement des nombres et de leurs écritures. En conséquence, les auteurs des manuels scolaires proposent de nombreux exercices sur le sens de l'écriture décimale, mais dans leurs séquences, les décimaux sont toujours considérés de façon décontextualisée, ils n'apparaissent jamais comme des rationnels particuliers et la seule écriture utilisée est l'écriture à virgule.

Situations multiplicatives, propriétés de l'opération et techniques de calcul

En tant qu'opération, la multiplication peut être appréhendée suivant trois aspects : l'ensemble des situations qu'elle modélise, ses propriétés algébriques et les techniques opératoires permettant le calcul d'un produit. A l'école élémentaire sont étudiées la multiplication de deux entiers puis celle d'un décimal par un entier. La multiplication de deux nombres décimaux s'enseigne au collège.

Malgré l'évolution des instructions ministérielles concernant la multiplication depuis le début du siècle, cette opération reste intimement liée à l'addition réitérée. La répartition actuellement choisie entre l'école élémentaire et le collège ne peut que renforcer cette liaison à l'école et ne semble pas avoir engendré de modification profonde au collège. Enfin, dans les programmes, la carence constatée de l'enseignement des grandeurs familières se conjugue avec celle de l'enseignement de l'opération multiplication en référence aux situations qu'elle modélise. Ces situations sont pourtant très variées et confèrent à la multiplication un sens complexe. Elles peuvent se classer en trois catégories [170] :

- les situations qui portent sur un seul espace de mesure (l'addition itérée, le dénombrement des points d'un réseau rectangulaire, la droite à double graduation, l'agrandissement de figures planes, et plus généralement toute situation conduisant au produit d'un scalaire par une grandeur ; les agrandissements

[169] Par exemple, dans l'ordre indiqué $\frac{7}{2} = \frac{35}{10} = 3 + \frac{5}{10} = 3{,}5 = 35 * 10^{-1}$.

[170] Nous utilisons ici les travaux de Gérard Vergnaud (1981, 1983).

successifs de figures planes et, plus généralement, toute situation conduisant à la composée d'opérateurs) ;

- les situations qui portent sur un produit de grandeurs (le cardinal du produit cartésien de deux ensembles finis qui se pose dans les problèmes de dénombrement, le calcul de l'aire d'un rectangle, etc.) ;
- les situations qui portent sur des grandeurs isomorphes c'est-à-dire qui conduisent au produit d'une grandeur quotient par une grandeur (par exemple les problèmes de prix, de vitesse, etc.).

Les propriétés de la multiplication donnent du sens à cette opération, en outre certaines d'entre elles sont utilisées pour établir la technique usuelle du calcul du produit de deux décimaux. Nous avons examiné la possibilité offerte par les différentes situations multiplicatives pour établir ces propriétés (commutativité, associativité, distributivité par rapport à l'addition, cas où l'un des facteurs est égal à zéro ou à un, ordre). Le bilan est double. Certaines propriétés, comme la distributivité, émergent de nombreuses situations alors que d'autres, comme l'associativité ou la multiplication par zéro, ne sont pas faciles à établir. Nous avons montré en outre que les situations multiplicatives ne sont pas « équivalentes » pour enseigner les propriétés de la multiplication.

Les possibilités sont variées pour justifier la technique opératoire. Différentes situations multiplicatives permettent son élaboration et, indépendamment des situations multiplicatives, on peut recourir aux unités de mesure, aux ordres de grandeur, aux opérateurs, aux fractions décimales ou à d'autres décompositions des facteurs décimaux pour établir la technique opératoire.

La multiplication des nombres décimaux, quels enseignements proposés ?

Nous avons étudié l'ensemble des publications - manuels, articles et brochures pédagogiques, recherches - comportant une proposition pour enseigner la multiplication des décimaux. Aucune de ces propositions ne peut consister en une simple présentation de la technique opératoire. Le mot d'ordre de la « quête du sens » reflète la position dominante de la noosphère, et il figure explicitement dans les programmes. Mais il peut s'interpréter au moins de deux façons différentes :

- la première implique une justification de la technique opératoire de la multiplication de deux nombres décimaux ;
- la seconde implique une étude de situations dans lesquelles la multiplication est un modèle pertinent, en considérant notamment le problème du prolongement de la multiplication de deux entiers à celle de deux décimaux.

Compte tenu des ces deux interprétations, nous avons classé selon trois types les propositions d'enseignement de la multiplication des décimaux que nous avons recensées dans les publications :

- la problématique du prolongement des situations multiplicatives de É à Ì n'est pas posée, la technique opératoire est admise ou justifiée par le professeur ;
- la problématique du prolongement des situations multiplicatives de É à Ì est posée par l'étude d'au moins une situation ou/et la technique opératoire est

justifiée au moins en partie par l'élève mais il n'y a pas de lien entre la situation et la technique ;

- la problématique du prolongement de la multiplication de É à Ì est posée par l'étude d'au moins une situation multiplicative, la technique opératoire est justifiée en relation avec la situation.

Les manuels scolaires proposent un enseignement des deux premiers types

Nous avons constaté que les manuels destinés à l'école élémentaire (ceux qui précèdent le changement de programme et qui abordent donc la multiplication des décimaux) proposaient seulement des scénarios du premier type. Il en est de même de la moitié des manuels actuels destinés au collège. La seconde moitié des manuels de collège proposent des scénarios du deuxième type où l'élève assume en partie la charge de la justification de la technique opératoire.

Les manuels proposent un enseignement de la multiplication décontextualisé. Les élèves travaillent sur les écritures des nombres, les références à des situations que les élèves connaissent bien disparaissent. Ainsi, la proposition la plus fréquente dans les manuels pour justifier la technique opératoire est de recourir à des opérateurs : on procède à des multiplications pour obtenir des facteurs entiers puis on divise le produit obtenu pour placer correctement la virgule. Ces manipulations restent formelles.

Dans les exercices, les situations d'isomorphisme de grandeurs sont pratiquement les seules situations proposées par les manuels. Le calcul d'aire de rectangles et les agrandissements de figures sont étudiés après la multiplication, le sens de l'opération n'est pas enrichi, c'est l'application de formules et l'utilisation de tableaux de proportionnalité qui sont visées, la reconnaissance du modèle multiplicatif n'est pas à la charge de l'élève.

Les travaux de recherche conduisent à des choix différents

Dans les publications qui proposent des scénarios du troisième type, on ne trouve que des brochures à l'intention des enseignants ou des travaux de recherche en didactique des mathématiques. L'enseignement de la multiplication des nombres décimaux commence alors par une phase contextualisée, les situations de référence sont nombreuses : agrandissement de figures, aire de rectangle, bande à double graduation...

Deux ingénieries didactiques (françaises) proposent des situations d'enseignement de la multiplication, intégrées à un enseignement des rationnels et des décimaux, qui reposent sur des activités de calcul d'aire ou d'agrandissement de figures. Les savoirs mathématiques s'y construisent à partir d'une connaissance approfondie de ces situations du domaine mathématique.

En Italie, certains chercheurs en didactique défendent un enseignement des mathématiques à l'école primaire qui s'appuie sur des *domaines d'expériences*, ces domaines sont choisis en dehors du domaine mathématique pour susciter une interaction entre, d'une part les connaissances, les raisonnements et les modes de calculs dans le cadre extrascolaire et d'autre part les savoirs et les activités qui leur sont associées dans le cadre d'une discipline étudiée dans le cadre scolaire.

Plus généralement, les publications à l'intention des enseignants proposent un enseignement de la multiplication des décimaux comprenant une phase contextualisée et se différencient ainsi des manuels scolaires.

Une nécessité pour l'enseignant : s'adapter aux élèves

Adapter l'enseignement aux élèves, c'est d'abord tenir compte de leurs connaissances. Les acquis attendus des élèves figurent dans les programmes de l'école primaire. Afin de mieux connaître leurs compétences à l'entrée en sixième, nous avons utilisé les résultats des évaluations à l'entrée ou à la sortie de la classe de sixième. Les évaluations du Ministère de l'Education nationale et celles de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public répondent à ce critère.

Les nombres décimaux à l'entrée en sixième

Le professeur chargé de l'enseignement de la multiplication des décimaux sera confronté aux conceptions de ses élèves à propos des nombres décimaux. Les programmes de l'école élémentaire prévoient un enseignement qui couvre trois approches complémentaires de ces nombres : les décimaux comme rationnels particuliers, les décimaux pour approcher les abscisses des points de la droite numérique et les décimaux pour mesurer des grandeurs en référence au système métrique.

Les évaluations montrent que les entiers sont bien mieux acquis que les nombres décimaux qui sont encore en cours d'acquisition pour de nombreux élèves de sixième. Une conception directement héritée des nombres entiers explique 10% à 50% des erreurs commises aux questions posées sur le nombre décimal, les résultats concernant les écritures fractionnaires figurent parmi les plus faibles. Le vocabulaire associé à l'écriture est complexe et entraîne de nombreuses confusions chez les élèves. Parallèlement, les questions relatives aux opérations sur les nombres décimaux montrent que 10% des erreurs de calcul d'une somme ou d'une différence et 20% des erreurs de calcul d'un produit surviennent au moment de placer la virgule. Les multiplications par 10, 100, 0,1, 0,01... ne sont réussies que par 50% à 70% des élèves.

Ainsi, les professeurs ne pourront pas directement envisager un enseignement de la multiplication des décimaux qui repose sur la notion de nombre décimal. Cela pourra conduire certains d'entre eux à enseigner la multiplication en s'appuyant davantage sur les nombres entiers, c'est ce qui est généralement proposé par les manuels scolaires qui utilisent les opérateurs.

La multiplication à l'entrée en sixième

Les programmes distinguent le sens de l'opération, hérité des situations multiplicatives, et la technique opératoire.

Les questions des évaluations qui portent sur la technique de la multiplication de deux entiers montrent qu'elle est acquise par environ 80% des élèves quand certaines difficultés ne sont pas présentes. Les erreurs principales sont causées par une connaissance insuffisante des tables de multiplication et par de mauvais décalages des produits partiels. La présence d'un chiffre supérieur à cinq dans les deux facteurs à la fois ou la présence d'un zéro dans le multiplicateur sont des difficultés qui font chuter les pourcentages de réussite entre 60% et 70%.

Les questions qui portent sur la résolution de problèmes multiplicatifs ne concernent que des situations de grandeurs isomorphes (poids, prix...) où la multiplication se conçoit comme une addition réitérée, et des calculs d'aire de rectangles. Dans le premier type de situations, le modèle multiplicatif est reconnu par environ 75% des élèves alors qu'il ne l'est que par 30% à 40% pour l'aire du rectangle. Les autres situations qui contribuent à la signification de la multiplication ne figurent pas dans les questions des évaluations.

Ces résultats peuvent inciter les professeurs de sixième à ne pas faire reposer l'enseignement de la multiplication de décimaux sur d'autres situations que celles qui sont bien identifiées par les élèves afin d'éviter des difficultés d'enseignement liées à des confusions. Ils peuvent aussi choisir un enseignement décontextualisé de la multiplication, c'est le choix que nous avons constaté chez les auteurs des manuels scolaires.

Une autre nécessité : prendre en compte le contexte institutionnel

Les programmes de 1945 pour l'école primaire limitaient le nombre décimal à l'expression d'une mesure et la multiplication à une addition réitérée, après une éventuelle conversion pour que le multiplicateur soit entier. L'objectif principal de l'enseignant primaire était de former les futurs adultes à la résolution des problèmes du quotidien. Après quelques évolutions successives des instructions officielles, les nombres décimaux ont été dissociés des mesures, et le sens de la multiplication s'est élargi. Les programmes se sont détournés des mathématiques du quotidien.

Actuellement, il est demandé aux professeurs d'enseigner la multiplication des décimaux de manière à améliorer les connaissances des élèves sur l'écriture décimale. Le texte du programme ne fait pas explicitement mention des différentes situations multiplicatives qui permettent de construire le sens de l'opération. Seuls les techniques opératoires et les procédés de calcul approché sont mentionnés. Certaines notions, comme l'aire du rectangle ou la proportionnalité, qui reposent sur la multiplication doivent être étudiées en sixième mais elles apparaissent plutôt comme une occasion d'appliquer la technique opératoire. Pour l'institution scolaire, l'objectif d'enseignement des nombres domine nettement celui de l'enseignement de l'opération, aucune mention n'est faite de ses propriétés. Cependant, la résolution de problèmes, y compris ceux du quotidien, reste un objectif explicite des programmes.

Les programmes laissent une certaine marge de manœuvre aux professeurs

Les programmes laissent les professeurs assez libres du choix des arguments pour légitimer théoriquement la technique de la multiplication des décimaux. Ils ne fixent pas la virtuosité technique comme objectif, les élèves doivent savoir effectuer des calculs simples et utiliser leur calculatrice pour résoudre des problèmes. L'institution scolaire, à travers l'enseignement de la multiplication de décimaux, vise aussi l'acquisition de la notion de nombre décimal.

L'ordre utilisé pour présenter les contenus dans les programmes n'est pas impératif : il est précisé que le professeur a toute liberté dans l'organisation de son enseignement à condition que soient atteints les objectifs visés. Néanmoins, cet ordre est repris dans tous les manuels dont les éditeurs, pour des raisons commerciales, veulent montrer qu'ils garantissent la conformité aux instructions officielles.

Le paragraphe du programme qui comprend la multiplication des décimaux est divisé en deux parties : techniques opératoires et procédés de calcul approché. Les situations multiplicatives sur lesquelles pourrait s'appuyer l'enseignement de l'opération ne sont pas mentionnées. Un enseignement décontextualisé est donc envisageable. Cependant, le programme indique que les problèmes doivent permettre aux élèves d'associer une situation concrète à un travail numérique et de mieux saisir le sens des opérations. Un enseignement comprenant une phase contextualisée n'est donc pas exclu.

La durée contraint fortement le projet d'enseignement

Après avoir montré la diversité des possibilités laissée par les programmes pour enseigner la technique opératoire, nous avons estimé la durée qu'un professeur pouvait accorder à l'enseignement de la multiplication des décimaux. Nous avons tenté de prendre en compte le niveau de maîtrise technique attendu par l'institution. Nous avons estimé à quatre à six heures de cours la durée de l'enseignement de la multiplication des décimaux envisagé sans phase contextualisée c'est - à - dire comprenant la technique opératoire, la relation avec la notation décimale, l'utilisation de la calculatrice, le recours au calcul approché pour contrôler les calculs sur machine ainsi que la résolution de problèmes liés à des situations multiplicatives.

C'est un enseignement de ce type qui est proposé par tous les manuels scolaires. Mais ce constat ne nous semble pas suffisant pour conclure que les professeurs de collège ne peuvent pas proposer à leurs élèves un enseignement où la multiplication serait étudiée à partir de situations multiplicatives. Pour cela ils pourront nourrir leurs cours par d'autres propositions parmi celles que nous avons étudiées.

BIBLIOGRAPHIE

APMEP (1986), *Aides pédagogiques pour le cycle moyen*, Nombres décimaux.

APMEP (1991), *Evaluation du programme de mathématiques* Sixième 1989 – Cinquième 1990, Paris : APMEP.

APMEP - IREM de Besançon (1987), *EVAluation du Programme de Mathématiques fin de sixième*, Paris : APMEP.

ARTIGUE M. (1988), Ingénierie didactique, *Recherches en didactique des mathématiques* 9/3 (281–308), Grenoble : La pensée sauvage.

ARTIGUE M. (1984), Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques. Thèse, Université de Paris 7.

ARTIGUE M. (1986), Etude de la dynamique d'une situation de classe : une approche de la reproductibilité, *Recherches en didactique des mathématiques 7/1 (5–62)*, Grenoble : La pensée sauvage.

BASSO M. & BONOTTO C (1996), Un'esperienza didattica di integrazione tra realtà extrascolastica e realtà scolastica riguardo ai numeri decimali, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* vol. 19A N. 5 (424–449), Paderno del Grappa TV. : Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin.

BODIN A (1994), Un observatoire du système d'enseignement des mathématiques - La situation de l'observatoire EVAPM, in *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (395–402), Grenoble : La Pensée Sauvage éditions.

BOERO P. (1994), Situations didactiques et problèmes d'apprentissage : convergence et divergence dans les perspectives de recherche, in *Vingt ans de didactique des mathématiques* (17–50), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

BOERO P.; DAPUETO. C.; FERRERO. E.; GARUTI. R.; LEMUT. E.; PARENTI. L.; SCALI. E. (1995), Aspects of Mathematics–Culture Relationship in Mathematics Teaching–Learning in Compulsory School, in *Proceedings of PME XIX*, Recife 1, pp. 151–166.

BOERO P. (2000), Objets d'usage courant dans la vie sociale exploités en classe, in *Actes de la Xe école d'été de didactique des mathématiques du 18 au 21 août 1999*, tome 1 pp. 245–252, Rectorat de Caen, IUFM de Caen, ARDM : Caen.

BOLON J. (1996), *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière Ecole-Collège*, Thèse de didactique des mathématiques de l'Université de Paris 5.

BRENNER. M.-E. (1998), Meaning and Money, in *Educational Studies in Mathematics 36*, pp. 123–155.

BRISSIAUD R. (1994), Penser l'usage du mot « fois » et l'interaction oral/écrit lors de l'apprentissage initial de la multiplication, in : *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (195–202), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

BROUSSEAU G. (1978), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques* 4/2 (165–198), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

BROUSSEAU G. (1980), Problèmes de l'enseignement des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques* 1/1 (11–59), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

BROUSSEAU G. (1981), Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques* 2/1 (37–127), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

BROUSSEAU G. (1986), Fondement et méthode de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques* 7/2 (33–115), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

BROUSSEAU G. (1989), Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In : Bednarz and C. Garnier (eds.), *Construction des savoirs - Obstacles et conflits* (41–63). Montréal : Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage et le développement en éducation (CIRADE).

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La pensée sauvage éditions.

BROUSSEAU G. & BROUSSEAU N. (1987), *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, Bordeaux : IREM de Bordeaux.

BUTLEN D. (1985), *Introductions de la multiplication à l'école primaire : histoire, analyses didactiques, manuels actuels*, Cahier de didactique des mathématiques n°19, Paris : IREM de Paris 7.

BUTLEN D. & PEZARD M. (1996), *Rapports entre habileté calculatoire et « prise de sens »dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et* *performances des élèves de l'école élémentaire*, Cahier de DIDIREM n°27, Paris : IREM de Paris 7.

CHEVALLARD Y. (1994), Les processus de transposition didactique et leur théorisation, In Arsac et al. (Eds) *La transposition didactique à l'épreuve* (135 - 180), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

CHEVALLARD Y. & BOSCH M. (2000), Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée, Petit *x*, n° 55, pp. 5 - 32

COLOMB J. (sous la direction de) (1995), *Calcul littéral - Savoirs des élèves de collège*, Paris : INRP, Documents et travaux de recherche en éducation.

DAHAN–DALMEDICO A. & PEIFFER J (1986), *Une histoire des mathématiques*, Paris : Seuil.

DEP ou DP&D (depuis 1989), *Evaluation CE 2 – 6ème - Résultats nationaux*, Paris : Ministère de l'Education nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, Direction de l'évaluation et de la prospective.

DEP (1997), *Pratiques pédagogiques de l'enseignement des mathématiques en sixième et progrès des élèves*, Paris : Ministère de l'Education nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche.

DOUADY R. & PERRIN M.–J. (1986), *Liaison Ecole–Collège : Nombres décimaux*, Brochure n°62, Paris : IREM de Paris 7.

DUPÉ C. & HILLION M. (1998), *Travaux numériques 6e*, Paris : Nathan.

DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine,* Berne : Peter Lang.

GIRODET M.–A. (1996), *L'influence des cultures sur les pratiques quotidienne des calculs*, Paris : CREDIF ENS de Fontenay–St Cloud DIDIER.

GRISVARD C. & LEONARD F. (1983), Résurgence de règles implicites dans la comparaison de nombres décimaux, *Bulletin de l'APMEP* n°340, Paris.

Groupe Nouveaux programmes de Collège (1996), *Activités pour la classe de sixième : Nombres décimaux – Aires et Périmètres*, Montpellier : IREM de Montpellier 2.

IFRAH G. (1994), *Histoire universelle des chiffres*, Paris : Robert Laffont.

INRP - ERMEL (1991), *apprentissages mathématiques en 6e*, Paris : Hatier.

IREM de Nice & CDDP de la Haute Corse (1981), *Le nombre décimal*, Bastia : CDDP de la Haute Corse.

LECOQ J. (1976), La multiplication des naturels à l'école élémentaire, in :*Brochure Elem Math II*, Paris : APMEP.

LELONG–FERRAND J. (1985), *Les fondements de la géométrie*, Paris : PUF.

PERRIN M.–J. (1984), *Représentation des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et du collège*, Cahier de didactique des mathématiques n°24, Paris : IREM de Paris 7.

PERRIN M.–J. (1999), Problèmes d'articulation de cadres théoriques, *Recherches en didactique des mathématiques* 19/3 (279 - 322), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

PRESSIAT A. (1991), *Apprentissages mathématiques en 6e*, Paris : Hatier/INRP.

PRESSIAT A. (2001), *Grandeurs et mesures : évolutions des organisations mathématiques de référence, et problèmes de transposition,* Cours donné à la 11e Ecole d'été de didactique des mathématiques le 26 août 2001.

ROBERT A. (1998), Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au Lycée et à l'Université, *Recherches en didactiques des mathématiques* 18/2 (139 - 190), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

RODITI E (1996), *La racine carrée en troisième, étude d'une activité,* cahier didirem n°17, Paris : IREM de Paris 7.

RODITI E (1997), DEA de didactique des disciplines, Didactique des mathématiques - Le tableau noir, un outil pour la classe de mathématiques, Cahier DIDIREM n°30, Paris : IREM de Paris 7.

RODITI E. (2000), Ordre de grandeur et multiplication des décimaux, in *Bulletin APMEP n° 431 Novembre–Décembre 2000* (719–727), APMEP : Paris.

RODITI E. (2001), L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. Etude de pratiques ordinaires, Thèse, Université de Paris 7.

ROGALSKI J. (1985), *Acquisition de la bidimensionnalité*, Thèse d'Etat.

ROUCHE N. (1992), *Le sens de la mesure*, Bruxelles : Didier Hatier.

SCALI. E. (1996), Expériences des enfants dans le domaine économique et construction des compétences de base en arithmétique, in *Proceedings of CIAEM* 47, pp. 409–413, Berlin.

DUBOIS C., FENICHEL M., PAUVERT M. *(1993), Se former pour enseigner les mathématiques* Tome 4. : *Nombres et opérations, fonctions numériques*, Paris : Armand Colin, Formation des enseignants.

VERGNAUD G., ROUCHIER A., RICCO G., MARTHE P., METREGISTE R., GIACCOBBE J. (1979), *Acquisition des « structures multiplicatives »*, IREM d'Orléans et Centre d'études des processus cognitifs et du langage, Paris : EHESS–CNRS.

VERGNAUD G. (1981), L'enfant, la mathématique et la réalité, Berne : Peter Lang.

VERGNAUD G. (1983), Mutiplicatives structures, in R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathématics : Concepts and processes*. New York : Academic Press.

VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques* 10/2.3 (133–170), Grenoble : La pensée sauvage éditions.

VERGNAUD G. (1992), Qu'est-ce que la didactique ? En quoi peut-elle intéresser la formation d'adultes peu qualifiés ? *Education permanente* n°111 (19–31).

VIBES J. (1973), *Information des maîtres, Décimaux et approche des réels*, Reims : INRP – CRDP.

VYGOTSKI (1985), *Pensée et langage.* Paris : Messidor.

Manuels scolaires et programmes officiels

Manuels scolaires

Pour l'école élémentaire

L'heure des maths CE2 (1999), Paris : Hatier.
Math outil CM1 (1997), Paris : Magnard.
Diagonale CM2 (1994), Paris : Nathan.
Math élem. CM2 (1998), Paris : Belin.
Math et calcul CM2 (1988), Paris : Hachette.
Math outil CM2 (1997), Paris : Magnard.
Nouvelle collection Thévenet CM2 (1996), Paris : Bordas.
Objectif Calcul CM2 (1988), Paris : Hatier.

PUGIBET CH. (1947), Arithmétique, cours supérieur, classe de fin d'études, certificat d'étude primaire, Paris : Armand Colin.

Pour le collège

Cinq sur cinq Math 6e (1996), Paris : Hachette.
Décimale 6e, (1996), Paris : Belin.
Le nouveau Pythagore 6e (1996), Paris : Hatier
Le nouveau Transmath 6e, (1996), Paris : Nathan.
Math 6e, (1996), Paris : Bordas.
Mathématiques 6e (1996), Paris : Delagrave.
Triangle 6e (1996), Paris : Hatier

Textes des programmes officiels ou accompagnements

Pour l'école élémentaire

Programmes et instructions officielles du 2 janvier 1970.
Instructions pédagogiques pour le cycle moyen, arrêté du 7 juillet 1978.
Programme du 23 avril 1985 pour l'enseignement des mathématiques au cycle 3.
Programme de mathématique de l'école primaire, Cycle des approfondissements, 22 février 1995.
Projets de documents d'application des programmes de l'école élémentaire, 26/08/1999.

Pour le collège

Programme de mathématique de la classe de sixième, 22 novembre 1995.
Mathématiques : articulation école–collège, BO n°44 du 5 décembre 1996.
Accompagnement des programmes de 6e, mathématiques, 1996.
Programmes de troisième, BO du 15 octobre 1998.

ORDRE DE GRANDEUR ET MULTIPLICATION DES NOMBRES DÉCIMAUX

Introduction

L'utilisation des ordres de grandeur figure plus ou moins explicitement dans de nombreux manuels scolaires. Cette utilisation s'explique par la demande de l'institution : les professeurs doivent apprendre aux élèves à contrôler les résultats obtenus par le calcul écrit ou affichés par la calculatrice. Nous cherchons ici à établir une méthode qui permette d'utiliser les ordres de grandeur pour contrôler la position de la virgule du produit de deux nombres décimaux positifs.

Nous commençons par un exemple traité de manière empirique qui illustre le problème, nous proposons alors quelques précisions qui permettent d'appuyer la question posée sur des fondements théoriques, puis nous développons une argumentation visant à légitimer l'utilisation des ordres de grandeur pour multiplier deux décimaux.

Une utilisation empirique des ordres de grandeur

- Considérons le produit 482,4 * 62,15 c'est-à-dire xy où x = 482,4 et y = 62,15.
- Lorsqu'on effectue « à la main » le calcul du produit xy on associe respectivement, aux facteurs décimaux x et y, les deux facteurs entiers X et Y obtenus en supprimant la virgule à x et à y : X = 4 824 et Y = 6 215.

Le produit XY des facteurs entiers associés est XY = 29 981 160.
Le produit xy s'obtient alors en plaçant une virgule au nombre XY, autrement dit $xy \in \{XY * 10^p, p \in \mathbb{Z}\}$. Il reste à déterminer la position de cette virgule.

- Convenons, pour le moment, que :

l'ordre de grandeur de 482,4 est 500 c'est-à-dire x' = 500 ;
l'ordre de grandeur de 62,15 est 60 c'est-à-dire y' = 60 ;
nous obtenons une estimation $x'y'$ du produit xy où $x'y'$ = 500 * 60 = 30 000.
Cette estimation nous permet d'affirmer que le produit xy est égal à 29 981,16.

La question posée ici est celle de la légitimité de la démarche utilisée. L'étude que nous avons menée pour établir cette démarche montre qu'elle n'est pas toujours valable, aussi nous proposons une étude plus générale que celle qu'on pourrait attendre à la suite de cet exemple. D'une part nous ne définissons pas *a priori* ce qu'est un ordre de grandeur, et d'autre part nous nous interrogeons sur la détermination du produit à partir de l'estimation obtenue.

Comment fonder cette utilisation des ordres de grandeur ?

De quelle précision sur x et sur y a–t–on besoin pour obtenir une estimation $x'y'$ suffisante du produit xy ? autrement dit, quelle erreur relative maximum peut - on tolérer en remplaçant x par x' et y par y' pour que l'estimation $x'y'$ soit suffisante ? Et comment comparer l'estimation $x'y'$ aux nombres obtenus à partir du produit entier XY pour déterminer le produit xy cherché ? c'est–à–dire pour que le nombre xy soit bien le plus proche de l'estimation $x'y'$ parmi les décimaux de l'ensemble E des « candidats possibles » : E = $\left\{XY * 10^{p}, p \in \hat{\mathrm{I}}\right\}$.

Ces deux questions sont liées, elles déterminent le problème posé. Précisons–les successivement.

Quel ordre de grandeur des facteurs faut–il pour obtenir le produit ?

La notion d'ordre de grandeur est souvent utilisée dans les programmes du collège pour évoquer le calcul approché qui permet de contrôler les résultats affichés par la calculatrice. Mais cette notion n'y est pas définie. Nous n'en avons pas non plus trouvé de définition dans les manuels ou les dictionnaires pour l'enseignement secondaire ni même dans les ouvrages destinés à l'enseignement supérieur [171]. Nous expliquons cette absence par le fait qu'un ordre de grandeur nous semble être une approximation dont la précision dépend de l'objectif qui conduit à son utilisation. Ici, notre objectif est de déterminer xy sachant XY et $x'y'$.

Ainsi, nous pouvons préciser notre problème :

ayant noté : $\Delta x = |x - x'|$ et $\Delta y = |y - y'|$,

nous cherchons un majorant M > 0 tel que : la condition $\dfrac{\Delta x}{x} < M$ et $\dfrac{\Delta y}{y} < M$ implique que xy est, parmi les éléments de E = $\left\{XY * 10^{p}, p \in \hat{\mathrm{I}}\right\}$, le plus proche de $x'y'$.

Il reste encore à définir ce que nous entendons par « le plus proche ».

[171] Cette notion était cependant enseignée avant que la calculatrice ne remplace la règle à calcul. C'est la justification de la méthode utilisée que nous n'avons pas trouvée. Citons, par exemple, le manuel de Terminale CDE rédigé par Marc GOURION, édité en 1971 par les éditions Fernand Nathan dans la collection Queysanne & Revuz (tome 2 p. 267) : « *On notera que la règle à calcul permet seulement de trouver les chiffres significatifs du produit. L'ordre de grandeur du résultat n'est pas obtenu par la lecture sur la règle mais par calcul approché direct, on remplace les nombres donnés par des nombres plus simples pour pouvoir situer le nombre cherché entre deux puissances successives de 10* ».

Deux critères pour déterminer le produit à partir de son estimation

Pour définir l'expression « le plus proche », il nous faut préciser comment comparer l'estimation $x'y'$ aux nombres de l'ensemble $E = \{XY * 10^p, p \in \text{Î}\}$. Nous envisageons deux méthodes suivant que l'on compare les nombres en calculant leur différence ou en calculant leur quotient. Examinons ces deux cas.

Si on calcule la différence de deux nombres pour les comparer

Dans l'exemple précédent, sachant que l'estimation $x'y'$ est 30 000, si la méthode de comparaison des nombres repose sur le calcul de leur différence, nous dirons que le produit cherché xy est 29 981,160 parce que c'est le nombre qui minimise $|n - 30\,000|$ lorsque n décrit l'ensemble E des nombres obtenus en plaçant une virgule au produit entier XY = 29 981 160.

Remarquons que $|xy - x'y'| = \Delta xy$ est l'erreur absolue commise sur xy en l'estimant par $x'y'$.

En définitive nous cherchons, avec cette première méthode, une précision suffisante sur x et sur y pour que : $\Delta xy = \min\limits_{p \in \text{Î}} \left\{ \left| XY * 10^p - x'y' \right| \right\}$ et que ce minimum soit atteint pour une valeur unique de p.

Si on calcule le quotient de deux nombres pour les comparer

Dans l'exemple précédent, sachant que l'estimation $x'y'$ est 30 000, si la méthode de comparaison des nombres repose sur le calcul de leur quotient, nous dirons que le produit cherché xy est 29 981,160 parce que c'est le nombre pour lequel le quotient $\frac{30\,000}{n}$ est le plus proche de 1 lorsque n décrit l'ensemble E des nombres obtenus en plaçant une virgule au produit entier XY = 29 981 160. Autrement dit, nous cherchons le nombre de l'ensemble E qui minimise l'expression $\left|\frac{x'y'}{n} - 1\right|$.

Remarquons que $\left|\frac{x'y'}{xy} - 1\right| = \left|\frac{x'y' - xy}{xy}\right| = \frac{|x'y' - xy|}{xy} = \frac{\Delta xy}{xy}$ qui est l'erreur relative commise sur xy en l'estimant par $x'y'$.

En définitive nous cherchons, avec cette seconde méthode, une précision suffisante sur x' et sur y' pour que : $\frac{\Delta xy}{xy} = \min\limits_{p \in \text{Î}} \left\{ \left| \frac{x'y'}{XY * 10^p} - 1 \right| \right\}$ et que ce minimum soit atteint pour une valeur unique de p.

Les deux méthodes sont à examiner

Les deux méthodes consistent donc à identifier le produit xy parmi les nombres n de l'ensemble E en choisissant celui qui optimise (minimise) soit l'erreur absolue, soit l'erreur relative, commise sur n en l'estimant par $x'y'$. Ces deux méthodes semblent *a priori* pertinentes. Pour chacune d'elles, définissons les conditions à déterminer pour la valider, déterminons ces conditions et indiquons la démarche à utiliser dans la pratique.

Définition du problème posé

Commençons par une remarque concernant l'ensemble E des nombres décimaux qui s'écrivent en plaçant une virgule au nombre entier XY, produit des deux entiers X et Y obtenus en supprimant la virgule aux deux nombres décimaux *x* et *y*.

Une autre écriture de l'ensemble E

Nous avions déjà écrit que E = $\{XY * 10^p \text{ , } p \in \text{Î}\}$.
Sachant que le produit *xy* appartient à cet ensemble,
$\exists\, q \in \text{Î}$ tel que : $xy = XY * 10^q$ c'est–à–dire tel que : $XY = xy * 10^{-q}$.
Nous obtenons alors, pour tout nombre décimal *d* :

$d \in E \quad \Leftrightarrow \exists r \in \text{Î}$ tel que $d = XY * 10^r$
$\Leftrightarrow \exists r \in \text{Î}$ tel que $d = xy * 10^{-q} * 10^r$
$\Leftrightarrow \exists p \in \text{Î}$ tel que $d = xy * 10^p$ (car $r - q$ décrit Î lorsque r décrit Î)
$\Leftrightarrow d \in \{\, xy * 10^p \text{ , } p \in \text{Î} \,\}$

Finalement E = $\{\, xy * 10^p \text{ , } p \in \text{Î} \,\}$.

Remarquons que *xy* est l'élément de E pour lequel $p = 0$.

Nous sommes en mesure maintenant de poser précisément notre problème.

Formulation du problème général

Soit $x \in \text{Ì}$, $x > 0$ et x' une approximation de x, notons $\Delta x = |x - x'|$.

Soit $y \in \text{Ì}$, $y > 0$ et y' une approximation de y, notons $\Delta y = |y - y'|$.

Nous cherchons à évaluer la précision nécessaire sur x' et sur y' pour s'assurer que *xy* est plus proche de $x'y'$ que tous les autres éléments de E.

◆ Pour la méthode d'optimisation de l'erreur absolue nous cherchons un majorant $M > 0$ tel que :

la double condition $\frac{\Delta x}{x} < M$ et $\frac{\Delta y}{y} < M$ implique la propriété (P_1)

où (P_1) : $\forall p \in \text{Î},\ p \neq 0 \Rightarrow \Delta xy < \left| xy * 10^p - x'y' \right|$

◆ Pour la méthode d'optimisation de l'erreur relative nous cherchons un majorant $M > 0$ tel que :

la double condition $\frac{\Delta x}{x} < M$ et $\frac{\Delta y}{y} < M$ implique la propriété (P_2)

où (P_2) : $\forall p \in \text{Î},\ p \neq 0 \Rightarrow \frac{\Delta xy}{xy} < \left| \frac{x'y'}{xy * 10^p} - 1 \right|$.

Etudions maintenant successivement chacune des deux méthodes.

Etude de la méthode d'optimisation de l'erreur absolue

Nous allons déterminer un majorant M > 0 tel que :

si $\frac{\Delta x}{x} < M$ et $\frac{\Delta y}{y} < M$, alors la propriété (P_1) est satisfaite.

Dans la suite nous appelons l'hypothèse (H) la condition : $\frac{\Delta x}{x} < M$ et $\frac{\Delta y}{y} < M$.

Nous commençons par écrire une propriété (P'_1) moins forte que (P_1) telle que :

$$(H) \Rightarrow (P'_1) \quad \Leftrightarrow \quad (H) \Rightarrow (P_1)$$

Restriction de la propriété (P_1)

Notons (P'_1) le système formé par ces deux propriétés :

$$(1) \quad |xy - x'y'| < |10\,xy - x'y'|$$

$$(2) \quad |xy - x'y'| < |0{,}1\,xy - x'y'|.$$

(P'_1) correspond à $p = \pm 1$ dans (P_1) donc : (H) $\Rightarrow$ (P_1) implique (H) $\Rightarrow$ (P'_1).

Réciproquement, montrons qu'un majorant M qui convient pour satisfaire (P'_1) convient aussi pour satisfaire (P_1).

Un encadrement de x'y'

Imposons M Â $\frac{1}{2}$.

Comme $\quad \frac{\Delta x}{x} < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} < x' < \frac{3x}{2}$

et $\quad \frac{\Delta y}{y} < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{2} < y' < \frac{3y}{2}$

on obtient, sous l'hypothèse (H), l'encadrement suivant :

$$\frac{xy}{4} < x'y' < \frac{9xy}{4}$$

et donc l'encadrement :

$$0{,}1\,xy < x'y' < 10\,xy.$$

Cet encadrement permet de supprimer les valeurs absolues dans les membres de droite des deux propriétés (1) et (2) :

$$(1') \quad |xy - x'y'| < 10\,xy - x'y'$$

et $$(2') \quad |xy - x'y'| < x'y' - 0{,}1\,xy.$$

La condition (P'_1) *suffit à réaliser la propriété* (P_1)

Montrons que si (H) implique (P'_1) alors, avec M Â $\frac{1}{2}$, (H) implique aussi (P_1).

Si $p > 1$	alors	$(10^p - 10)\,xy > 0$
	donc	$10xy - x'y' < 10xy - x'y' + (10^p - 10)\,xy$
	et donc	$10xy - x'y' < xy * 10^p - x'y'$

Si $p <\ -1$	alors	$(10^p\ -\ 0{,}1)\ xy < 0$
	donc	$x'y'\ -\ 0{,}1xy < x'y'\ -\ 0{,}1xy\ -\ (10^p\ -\ 0{,}1)\ xy$
	et donc	$x'y'\ -\ 0{,}1xy < x'y'\ -\ 10^p\ xy$

Par conséquent, si l'hypothèse (H) est réalisée avec M Â $\frac{1}{2}$ on a :

$$|xy\ -\ x'y'| < 10\,xy\ -\ x'y' \quad \Rightarrow \quad \forall\, p\ \text{Ã}\ 1, |xy\ -\ x'y'| < xy * 10^p\ -\ x'y'$$

$$\text{et}\ |xy\ -\ x'y'| < x'y'\ -\ 0{,}1\,xy \quad \Rightarrow \quad \forall\, p\ \text{Â}\ -1, |xy\ -\ x'y'| < x'y'\ -\ xy * 10^p$$

c'est ce qu'il fallait démonter.

Une approximation des facteurs pour approcher suffisamment le produit

Nous supposons l'hypothèse (H) réalisée avec M Â $\frac{1}{2}$ et nous cherchons pour quelles valeurs de M cette hypothèse entraîne (P'_1) c'est–à–dire :

(1') $\quad |xy\ -\ x'y'| < 10\,xy\ -\ x'y'$

et $\quad$ (2') $\quad |xy\ -\ x'y'| < x'y'\ -\ 0{,}1\,xy$

Les valeurs absolues du premier membre de chaque inégalité (1') et (2') conduisent à envisager deux cas : celui où *x'y'* est une approximation par défaut de *xy* et celui où *x'y'* en est une approximation par excès.

Afin de supprimer les valeurs absolues contenues dans Δx et Δy nous distinguerons aussi les quatre cas possibles de la position relative de *x* et *x'* et de *y* et *y'* :

$x' < x$ et $y' < y$; $\quad x' < x$ et $y' > y$; $\quad x' > x$ et $y' < y$ et $\quad x' > x$ et $y' > y$.
Compte tenu du rôle symétrique de *x* et *y*, nous ne distinguerons cependant pas le deuxième cas du troisième.

Si le produit estimé est une approximation par défaut du produit exact

Dans ce premier cas, nous pouvons rejeter l'hypothèse où $x' > x$ et $y' > y$.

En outre, nous avons $0{,}1xy < x'y' < xy < 10xy$ donc la condition (1') est assurée.

Nous recherchons donc M Â $\frac{1}{2}$ tel que : (H) $\Rightarrow\ xy\ -\ x'y' < x'y'\ -\ 0{,}1\,xy$.

Or $\quad xy\ -\ x'y' < x'y'\ -\ 0{,}1\,xy \quad \Leftrightarrow \quad 1{,}1\,xy < 2\,x'y'$

$$\Leftrightarrow \quad xy < \frac{20}{11}x'y'$$

◆ Cas où *x' < x et y' < y*

$\frac{\Delta x}{x} <$ M s'écrit : $x\ -\ x' <$ Mx c'est–à–dire, puisque M < 1 : $x < \frac{1}{1\text{ - M}}x'$.

De même $\frac{\Delta y}{y} <$ M s'écrit : $y < \frac{1}{1\text{ - M}}y'$.

Ainsi, l'hypothèse (H) implique : $xy < \frac{1}{(1\text{ - M})^2}\ x'y'$.

Puisque M Â $\frac{1}{2}$, pour satisfaire (2), il suffit de choisir M tel que : $\frac{1}{(1-\mathrm{M})^2}$ Â $\frac{20}{11}$.

Or M $\in$]0 ; 1[et $\frac{1}{(1-\mathrm{M})^2}$ Â $\frac{20}{11}$ conduisent à : 0 < M Â 1 - $\sqrt{\frac{11}{20}}$.

Ainsi M = inf $\left\{\frac{1}{2};1-\sqrt{\frac{11}{20}}\right\}$ est, dans ce cas, une valeur satisfaisante,

comme 1 - $\sqrt{\frac{11}{20}}$ ó 0,25838 nous en déduisons M = 1 - $\sqrt{\frac{11}{20}}$.

◆ Cas où *x' < x et y' > y*

$\frac{\Delta x}{x}$ < M s'écrit toujours : $x < \frac{1}{1-\mathrm{M}} x'$.

La condition $\frac{\Delta y}{y}$ < M n'apporte, en revanche, pas d'autre majoration que $y < y'$.

Ainsi, l'hypothèse (H) implique : $xy < \frac{1}{1-\mathrm{M}} x'y'$.

Il suffit donc, pour satisfaire (2), de choisir M Â $\frac{1}{2}$ tel que : $\frac{1}{1-\mathrm{M}}$ Â $\frac{20}{11}$.

Or M $\in$]0 ; 1[et $\frac{1}{1-\mathrm{M}}$ Â $\frac{20}{11}$ conduisent à : 0 < M Â $\frac{9}{20}$.

Comme 1 - $\sqrt{\frac{11}{20}} < \frac{9}{20} < \frac{1}{2}$, nous retiendrons encore : M = 1 - $\sqrt{\frac{11}{20}}$.

<u>Si le produit estimé est une approximation par excès du produit exact</u>

Sous cette condition, nous pouvons rejeter le cas où $x' < x$ et $y' < y$.
En outre, nous avons $0{,}1xy < xy < x'y' < 10xy$ donc la condition (2') est assurée.

Nous recherchons donc M Â $\frac{1}{2}$ tel que : (H) $\Rightarrow$ $x'y' - xy < 10\,xy - x'y'$

$$\text{Or}\quad x'y' - xy < 10\,xy - x'y' \iff 11\,xy > 2\,x'y' \iff xy > \frac{2}{11}x'y'$$

◆ Cas où *x' > x et y' > y*

$\frac{\Delta x}{x}$ < M s'écrit : $x' - x < \mathrm{M}x$

c'est-à-dire : $x > \frac{1}{1+\mathrm{M}} x'$.

De même, $\frac{\Delta y}{y}$ < M s'écrit : $y < \frac{1}{1+\mathrm{M}} y'$.

Ainsi, l'hypothèse (H) implique : $xy > \frac{1}{(1+\mathrm{M})^2} x'y'$.

Il suffit donc, pour satisfaire (1), de choisir $M \leq \frac{1}{2}$ tel que : $\frac{1}{(1+M)^2} \geq \frac{2}{11}$.

Or $M > 0$ et $\frac{1}{(1+M)^2} \geq \frac{2}{11}$ conduisent à : $0 < M \leq \sqrt{\frac{11}{2}} - 1$

et comme $\sqrt{\frac{11}{2}} - 1 \approx 1{,}35$, nous retiendrons encore : $M = 1 - \sqrt{\frac{11}{20}}$.

- Cas où $x' > x$ et $y' < y$

$\frac{\Delta x}{x} < M$ s'écrit encore : $x > \frac{1}{1+M} x'$

La condition $\frac{\Delta y}{y} < M$ n'apporte, en revanche, pas d'autre minoration que $y > y'$.

Ainsi, l'hypothèse (H) implique : $xy > \frac{1}{1+M} x'y'$.

Il suffit donc de choisir M tel que $\frac{1}{1+M} \geq \frac{2}{11}$ pour satisfaire (1).

Or $M > 0$ et $\frac{1}{1+M} \geq \frac{2}{11}$ conduisent à : $0 < M \leq \frac{9}{2}$

et comme $\frac{9}{2} > 1 - \sqrt{\frac{11}{20}}$ nous retiendrons encore $M = 1 - \sqrt{\frac{11}{20}}$.

Conclusion de la méthode d'optimisation de l'erreur absolue

L'étude menée ci-dessus conduit à choisir $M = 1 - \sqrt{\frac{11}{20}}$.

Si l'erreur relative sur x et sur y est strictement inférieure à M, alors le produit estimé $x'y'$ est plus proche du produit xy que de tous les autres nombres obtenus en plaçant une virgule au produit XY des entiers X et Y associés à x et à y.

Pour placer la virgule au produit XY de manière à obtenir xy, il suffira donc de choisir le nombre décimal le plus proche du produit estimé $x'y'$.

Utilisation de la méthode d'optimisation de l'erreur absolue

Examinons maintenant comment, dans la pratique, choisir un ordre de grandeur suffisant pour que l'erreur relative portant sur x et sur y soit inférieure à $1 - \sqrt{\frac{11}{20}}$.

Des contraintes pratiques en classe de sixième

Dans une classe de sixième, la capacité en calcul mental des élèves impose de se limiter à la table de multiplication de 1 à 9 et à quelques règles simples de calcul mental comme la multiplication par 11, par 1,5 ou par 2,5.

Une précision de deux chiffres est suffisante mais inadaptée dans la pratique

Soit $x \in$ Ì , $x > 0$. Notons son écriture scientifique : $a * 10^n$ avec $a \in [1\ ;\ 10[$ et $n \in$ Î .

Choisissons, comme ordre de grandeur de x, le nombre x' défini par :

$x' = a' * 10^n$ où a' est la valeur arrondie **au dixième** de a.

L'erreur $\dfrac{\Delta x}{x} = \dfrac{|a - a'|}{a}$ est maximale dans le cas « limite » où $a = 1{,}05$ et $a' = 1{,}1$ donc inférieure à $\dfrac{0{,}05}{1{,}05} \approx 0{,}048$, valeur qui est « très » inférieure à $M = 1 - \sqrt{\dfrac{11}{20}}$

Mais ce choix n'est pas accessible aux élèves de sixième qui ne peuvent pas, mentalement, effectuer le produit de deux nombres à deux chiffres.

Une précision d'un chiffre est « presque » suffisante

Choisissons alors, comme ordre de grandeur de x, le nombre x' défini par :

$x' = a' * 10^n$ où a' est la valeur arrondie **à l'unité** de a.

L'erreur $\dfrac{\Delta x}{x} = \dfrac{|a - a'|}{a}$ est maximale dans le « cas limite » où $a = 1{,}5$ et $a' = 2$ donc inférieure à $\dfrac{0{,}5}{1{,}5} = \dfrac{1}{3}$ valeur qui n'est pas inférieure à M...

Cette précision n'est donc pas suffisante, procédons cependant à deux remarques.

◆ La valeur de $1 - \sqrt{\dfrac{11}{20}}$ a été trouvée seulement dans le cas où les deux ordres de grandeur sont des approximations par défaut des deux facteurs. Dans tous les autres cas, la valeur de M égale à $\dfrac{1}{3}$ est suffisante.

La majoration par $M = 1 - \sqrt{\dfrac{11}{20}}$ était nécessaire pour s'assurer que :

$|xy - x'y'| < x'y' - 0{,}1\, xy$.

Cette inégalité permet de rejeter la valeur $0{,}1\, xy$. Un autre argument le permet aussi : nous savons que la condition $M = \dfrac{1}{2}$ suffit pour assurer que : $0{,}1xy < x'y'$, $x'y'$ étant une approximation par défaut de xy, il ne saurait être question de choisir une valeur inférieure à $x'y'$.

◆ Remarquons aussi que la majoration de $\dfrac{\Delta x}{x}$ ainsi obtenue est insuffisante seulement dans le cas des valeurs de x pour lesquelles $a \in\ ]1\ ;\ 1{,}5[$.

En effet, dès que *a* est supérieur à 2, l'erreur relative $\dfrac{\Delta x}{x} = \dfrac{|a - a'|}{a}$ est inférieure à 0,25 donc elle est inférieure à M.

Ces valeurs de *a* sont donc de la forme $a = 1+\alpha$ avec $\alpha \in \,]\,0\,;\,0{,}5\,[$ et où α est une solution de l'inéquation $\dfrac{\alpha}{1+\alpha} > \mathrm{M}$.

Cette inéquation définie sur] 0 ; 0,5 [a pour solution $\left]\dfrac{\mathrm{M}}{1-\mathrm{M}}\,;\dfrac{1}{2}\right[$.

Les valeurs de *a* correspondantes appartiennent donc à l'intervalle :

$$]\,\mathrm{A}\,;1{,}5[\text{ où } \mathrm{A} = 1+\frac{\mathrm{M}}{1-\mathrm{M}}.$$ Indiquons que A ó 1,348.

Finalement, la méthode d'optimisation de l'erreur absolue est directement applicable en recourant seulement aux ordres de grandeur sauf pour toutes les valeurs de *x* ou de *y* qui conduisent à $a \in \,]\,\mathrm{A}\,;1{,}5[$ où A ó 1,348.

<u>*Un exemple où la précision d'un chiffre significatif n'est pas suffisante*</u>

Considérons les deux décimaux $x = 1{,}45$ et $y = 147{,}2$;
les facteurs entiers associés sont X = 145 et Y = 1 472 donc XY = 213 440 ;
les ordres de grandeur des facteurs sont $x' = 1$ et $y' = 100$ donc $x'y' = 100$.

La valeur la plus proche de 100, obtenue en plaçant une virgule à 213 440, est 21,344 et non 213,44. Pourtant c'est bien 213,44 qui est la valeur du produit *xy* et non 21,344 qui est la valeur de 0,1*xy*.

Remarquons de nouveau qu'un raisonnement élémentaire permet de rejeter la valeur 21,344 au profit de 213,44 : l'estimation du produit *xy* par 100 est une approximation par défaut, il n'est donc pas possible d'avoir $xy = 21{,}344$.

Faut - il pour autant invalider totalement la méthode ? Non si l'on accepte de la modifier légèrement [172].

<u>*Deux adaptations possibles*</u>

Afin de modifier la méthode, on peut :

- soit conserver l'ordre de grandeur avec un chiffre significatif et affiner les décisions pour exclure 0,1*xy* dans le cas où *x*' et *y*' sont des approximations par défaut de *x* et de *y* ;
- soit modifier le choix de l'ordre de grandeur pour les valeurs de *x* ou de *y* qui conduisent à $a \in \,]\,\mathrm{A}\,;1{,}5[$ où A ó 1,348.

[172] Remarquons, avant de poursuivre, que les ordres de grandeur ainsi déterminés n'illustrent pas une méthode judicieuse. Il semblerait beaucoup plus efficace de compenser une approximation pas défaut par une approximation par excès. Ainsi, ayant choisi $x' = 1$, il conviendrait de prendre $y' = 200$. Si nous ne retenons pas cette possibilité, c'est parce qu'il nous semble difficile de proposer à des élèves de sixième une définition de l'ordre de grandeur qui dépend du contexte : avec $x = 1{,}65$ on choisirait, $x' = 2$ et pour la même valeur de $y = 147{,}2$, on prendrait alors $y' = 100$.

Première adaptation de la méthode d'optimisation de l'erreur absolue

Il suffit, après avoir estimé le produit xy par le produit $x'y'$ de se poser la question supplémentaire : « les approximations x' et y' sont−elles toutes les deux des approximations par défaut des facteurs x et y ? » et de tenir compte de la réponse pour exclure $0{,}1xy$ dans le cas où la réponse est affirmative.

Méthode pour multiplier deux décimaux en utilisant les ordres de grandeur

◆ Soit x quelconque, $x \in$ Ì, $x > 0$. Supposons que l'écriture scientifique de x soit $a * 10^n$ avec $a \in [1 ; 10[$ et $n \in$ Î. Nous choisissons, comme ordre de grandeur de x, le nombre x' défini par : $x' = a' * 10^n$ où a' est la valeur arrondie **à l'unité** de a.

◆ Soit à multiplier deux facteurs décimaux positifs x et y ;

- on commence par associer deux facteurs entiers X et Y aux facteurs décimaux x et y en supprimant leur virgule ;
- on calcule le produit XY des deux facteurs entiers ;
- on détermine les ordres de grandeur x' et y' des facteurs x et y. Puis on estime le produit xy par le produit $x'y'$ que l'on calcule mentalement ;
- parmi les nombres qu'on peut écrire en plaçant une virgule au nombre XY, on choisit celui qui répond aux deux conditions suivantes :

1°) le nombre obtenu est supérieur au produit estimé $x'y'$ si les deux ordres de grandeur x' et y' sont deux approximations par défaut des facteurs x et y ;
2°) le nombre obtenu est le plus proche du produit estimé $x'y'$.

Premier exemple

Soit à multiplier 612,54 et 68,25.

	6 1 2,5 4	→		6 0 0
*	6 8,2 5	→	*	7 0
	4 1 8 0 5 8 5 5 0			4 2 0 0 0

Les deux ordres de grandeur ne sont pas deux approximations par défaut, on choisit donc le nombre le plus proche de 42 000 en plaçant une virgule au nombre entier 418 058 550.

Conclusion : 612,54 * 68,25 = 41 805,855.

Deuxième exemple

Soit à multiplier 148,17 et 24,9.

	1 4 8,1 7	→		1 0 0
*	2 4,9	→	*	2 0
	3 6 8 9 4 3 3			2 0 0 0

Les deux ordres de grandeur sont des approximations par défaut, on choisit donc le nombre le plus proche de 2 000, **et supérieur à 2 000**, en plaçant une virgule au nombre entier 3 389 433.

Conclusion : 148,17 et 24,9 = 3 689,433.

Remarque : Sans la restriction « supérieur à 2 000 », on aurait pu proposer 368,9433 qui est plus proche de 2 000 que 3 689,433 ne l'est.
En effet : 2 000 - 368,9433 = 1 631,0567 et 3 689,433 - 2 000 = 1 689,433.

Seconde adaptation de la méthode d'optimisation de l'erreur absolue

Une seconde possibilité est de choisir, pour chaque facteur, un ordre de grandeur plus précis que précédemment pour les valeurs de x ou de y qui conduisent à $a \in]1 ; 1{,}5[$.

L'ordre de grandeur possède un chiffre significatif ou bien deux

◆ Soit x un décimal positif, $x = a * 10^n$ avec $a \in [1 ; 10[$ et $n \in$ Î :
nous choisissons, comme ordre de grandeur de x, le nombre $x' = a' * 10^n$ où
- si $a \in [2 ; 10[$ alors a' est la valeur arrondie **à l'unité** de a ;
- si $a \in [1 ; 2[$ alors a' est la valeur la plus proche de a parmi : 1, 1,5 et 2.

Ainsi l'erreur relative maximale ainsi commise est inférieure à 0,25 donc est inférieure à $M = 1 - \sqrt{\frac{11}{20}}$ puisque $M \approx 0{,}258$.

Avec ce choix pour l'ordre de grandeur, on obtient la méthode suivante.

◆ Soit à multiplier deux facteurs décimaux positifs x et y ;
- on commence par associer deux facteurs entiers X et Y aux facteurs décimaux x et y en supprimant leur virgule ;
- on calcule le produit XY des deux facteurs entiers ;
- on détermine les ordres de grandeur x' et y' des facteurs x et y. Puis on estime le produit xy par le produit $x'y'$ que l'on calcule mentalement ;
- parmi les nombres qu'on peut écrire en plaçant une virgule au nombre XY, on choisit celui qui est le plus proche du produit estimé $x'y'$.

Premier exemple

Soit à multiplier 612,54 et 68,25.

$$\begin{array}{lr} & 6\;1\;2{,}5\;4 \\ * & 6\;8{,}2\;5 \\ \hline & 4\;1\;8\;0\;5\;8\;5\;5\;0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{lr} & 6\;0\;0 \\ * & 7\;0 \\ \hline & 4\;2\;0\;0\;0 \end{array}$$

On choisit le nombre le plus proche de 42 000 en plaçant une virgule au nombre entier 418 058 550.

Conclusion : 612,54 * 68,25 = 41 805,855.

Deuxième exemple

Soit à multiplier 148,17 et 24,9.

$$\begin{array}{rr}
 & 1\,4\,8,1\,7 \\
* & 2\,4,9 \\
\hline
 & 3\,6\,8\,9\,4\,3\,3
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{rr}
 & 1\,5\,0 \\
* & 2\,0 \\
\hline
 & 3\,0\,0\,0
\end{array}$$

On choisit donc le nombre le plus proche de 3 000 en plaçant une virgule au nombre entier 3 689 433.

Conclusion : 148,17 * 24,9 = 3 689,433.

Conclusion sur la méthode d'optimisation de l'erreur absolue

Il est donc possible d'utiliser, en toute rigueur, les ordres de grandeur pour contrôler la place de la virgule dans leur produit en utilisant la méthode d'optimisation de l'erreur absolue. Mais la méthode demande quelques précautions qui excluent une utilisation empirique.

Etude de la méthode d'optimisation de l'erreur relative

Rappelons que nous cherchons un majorant M > 0 tel que :

si $\dfrac{\Delta x}{x} < \mathrm{M}$ et $\dfrac{\Delta y}{y} < \mathrm{M}$, alors $\forall p \in \text{Î},\ p \neq 0 \Rightarrow \dfrac{\Delta xy}{xy} < \left| \dfrac{x'y'}{xy * 10^p} - 1 \right|$

Dans la suite nous appelons l'hypothèse (H) la condition : $\dfrac{\Delta x}{x} < \mathrm{M}$ et $\dfrac{\Delta y}{y} < \mathrm{M}$

nous notons (P_2) la propriété : $\forall p \in \text{Î},\ p \neq 0 \Rightarrow \dfrac{\Delta xy}{xy} < \left| \dfrac{x'y'}{xy * 10^p} - 1 \right|$.

Comme précédemment, nous commençons par écrire une propriété (P'_2) moins forte que (P_2) telle que :

$$(\mathrm{H}) \Rightarrow (P'_2) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{H}) \Rightarrow (P_2)$$

Restriction de la propriété (P_2)

Notons (P'_2) le système formé par ces deux propriétés :

(1'') $\quad \dfrac{\Delta xy}{xy} < \left| \dfrac{x'y'}{10\,xy} - 1 \right|$

(2'') $\quad \dfrac{\Delta xy}{xy} < \left| \dfrac{x'y'}{0{,}1\,xy} - 1 \right|$

(P'_2) correspond à $p = \pm 1$ dans (P_2) donc : (H) $\Rightarrow$ (P_2) implique (H) $\Rightarrow$ (P'_2).

Réciproquement, montrons qu'un majorant M qui convient pour satisfaire (P'_2) convient aussi satisfaire (P_2).

Nous avions montré que si M Â $\dfrac{1}{2}$ on obtient, sous l'hypothèse (H), l'encadrement : $\quad 0{,}1\,xy < x'y' < 10\,xy$.

La première inégalité conduit à $\dfrac{x'y'}{0{,}1\,xy} - 1 > 0$,

et la seconde inégalité conduit à $\dfrac{x'y'}{10\,xy} - 1 < 0$.

La condition (P'$_2$) *suffit à réaliser la propriété* (P$_2$)

Montrons que si (H) implique (P'$_2$) alors, avec M Â $\frac{1}{2}$, (H) implique aussi (P$_2$).

Si $n > 0$ alors $\dfrac{1}{10^n} < 1$

donc $\dfrac{x'y'}{10\,xy} > \dfrac{x'y'}{10\,xy * 10^n}$

et donc $1 - \dfrac{x'y'}{10\,xy} < 1 - \dfrac{x'y'}{10\,xy * 10^n}$.

Autrement dit : $\forall p \in$ Î, $p > 1 \Rightarrow 1 - \dfrac{x'y'}{10\,xy} < 1 - \dfrac{x'y'}{xy * 10^p}$

Si $n < 0$ alors $\dfrac{1}{10^n} > 1$

donc $\dfrac{x'y'}{0{,}1xy} < \dfrac{x'y'}{0{,}1xy * 10^n}$

et donc $\dfrac{x'y'}{0{,}1xy} - 1 < \dfrac{x'y'}{0{,}1xy * 10^n} - 1$.

Autrement dit : $\forall p \in$ Î, $p < -1 \Rightarrow \dfrac{x'y'}{0{,}1xy} - 1 < \dfrac{x'y'}{xy * 10^p} - 1$

Par conséquent, si l'hypothèse (H) est réalisée avec M Â $\frac{1}{2}$ on a :

$$\frac{\Delta xy}{xy} < \left| \frac{x'y'}{10\,xy} - 1 \right| \quad \Rightarrow \quad \forall p > 1,\ \frac{\Delta xy}{xy} < \left| \frac{x'y'}{xy * 10^p} - 1 \right|$$

et $$\frac{\Delta xy}{xy} < \left| \frac{x'y'}{0{,}1\,xy} - 1 \right| \quad \Rightarrow \quad \forall p < -1,\ \frac{\Delta xy}{xy} < \left| \frac{x'y'}{xy * 10^p} - 1 \right|$$

c'est ce qu'il fallait démonter.

Une approximation des facteurs pour approcher suffisamment le produit

Nous supposons l'hypothèse (H) réalisée avec M Â $\frac{1}{2}$ et nous cherchons pour quelles valeurs de M cette hypothèse entraîne (P'$_2$) c'est-à-dire :

(1'') $\dfrac{\Delta xy}{xy} < 1 - \dfrac{x'y'}{10xy}$

et (2'') $\dfrac{\Delta xy}{xy} < \dfrac{x'y'}{0{,}1xy} - 1$

Les valeurs absolues contenues dans Δxy conduisent à envisager deux cas : celui où $x'y'$ est une approximation par défaut de xy et celui où $x'y'$ en est une approximation par excès.

Afin de supprimer les valeurs absolues contenues dans Δx et Δy nous distinguerons aussi les quatre cas possibles de la position relative de x et x' et de y et y' :

$x' < x$ et $y' < y$; $x' < x$ et $y' > y$; $x' > x$ et $y' < y$ et $x' > x$ et $y' > y$.
Compte tenu du rôle symétrique de x et y, comme nous l'avons déjà indiqué, nous ne distinguerons pas le deuxième cas du troisième.

<u>Si le produit estimé est une approximation par défaut du produit exact</u>

Dans ce premier cas, nous pouvons rejeter l'hypothèse où $x' > x$ et $y' > y$.

En outre, nous avons $0{,}1xy < x'y' < xy < 10xy$ donc la condition (1'') est assurée.

Nous recherchons donc M Â $\frac{1}{2}$ tel que : (H) $\Rightarrow$ $1 - \frac{x'y'}{xy} < \frac{x'y'}{0{,}1\,xy} - 1$.

$$\text{Or} \qquad 1 - \frac{x'y'}{xy} < \frac{x'y'}{0{,}1\,xy} - 1 \Leftrightarrow \quad xy - x'y' < 10\,x'y' - xy$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\,xy < 11\,x'y'$$

$$\Leftrightarrow \quad xy < \frac{11}{2}\,x'y'$$

◆ Cas où *$x' < x$ et $y' < y$*

$\frac{\Delta x}{x} < M$ s'écrit : $x < \frac{1}{1 - M}x'$ et de même $\frac{\Delta y}{y} < M$ s'écrit : $y < \frac{1}{1 - M}y'$.

Ainsi, l'hypothèse (H) implique : $xy < \frac{1}{(1 - M)^2}\, x'y'$.

Puisque M Â $\frac{1}{2}$, pour satisfaire (2''), il suffit de choisir M tel que :

$\frac{1}{(1 - M)^2}$ Â $\frac{11}{2}$.

Or $M \in\,]0\,;1[$ et $\frac{1}{(1 - M)^2}$ Â $\frac{11}{2}$ conduisent à : $0 <$ M Â $1 - \sqrt{\frac{2}{11}}$

Ainsi $M = \inf\left\{\frac{1}{2} ; 1 - \sqrt{\frac{2}{11}}\right\}$ est, dans ce cas, une valeur satisfaisante,

comme $1 - \sqrt{\frac{2}{11}}$ ó 0,573 nous retiendrons simplement $M = \frac{1}{2}$.

◆ Cas où *$x' < x$ et $y' > y$*

$\frac{\Delta x}{x} < M$ s'écrit toujours : $x < \frac{1}{1 - M}x'$.

La condition $\frac{\Delta y}{y} < M$ n'apporte, en revanche, pas d'autre majoration que $y < y'$.

Ainsi, l'hypothèse (H) implique : $xy < \frac{1}{1 - M}\, x'y'$.

Il suffit donc, pour satisfaire (2’’), de choisir M Â $\frac{1}{2}$ tel que : $\frac{1}{1 - M}$ Â $\frac{11}{2}$.

Or M ∈]0 ; 1[et $\frac{1}{1 - M}$ Â $\frac{11}{2}$ conduisent à : 0 < M Â $\frac{9}{11}$.

Comme $\frac{9}{11} > \frac{1}{2}$, nous retiendrons encore : $M = \frac{1}{2}$.

<u>*Si le produit estimé est une approximation par excès du produit exact*</u>

Sous cette condition, nous pouvons rejeter le cas où $x' < x$ et $y' < y$.

En outre, nous avons $0{,}1xy < xy < x'y' < 10xy$ donc la condition (2’’) est assurée.

Nous recherchons donc M Â $\frac{1}{2}$ tel que : (H) $\Rightarrow \quad \frac{x'y'}{xy} - 1 < 1 - \frac{x'y'}{10\,xy}$

Or $\quad \frac{x'y'}{xy} - 1 < 1 - \frac{x'y'}{10\,xy} \quad \Leftrightarrow \quad 10\,x'y' - 10\,xy < 10\,xy - x'y'$

$$\Leftrightarrow \quad xy > \frac{11}{20}\,x'y'$$

◆ Cas où $x' > x$ et $y' > y$

$\frac{\Delta x}{x} < M$ s’écrit : $x > \frac{1}{1+M}x'$ et de même, $\frac{\Delta y}{y} < M$ s’écrit : $y < \frac{1}{1+M}y'$

.

Ainsi, l’hypothèse (H) implique : $xy > \frac{1}{(1+M)^2}\,x'y'$.

Il suffit donc, pour satisfaire (1’’), de choisir M Â $\frac{1}{2}$ tel que : $\frac{1}{(1+M)^2}$ Ã $\frac{11}{20}$.

Or M > 0 et $\frac{1}{(1+M)^2}$ Ã $\frac{11}{20}$ conduisent à : 0 < M Â $\sqrt{\frac{20}{11}} - 1$

et comme $\sqrt{\frac{20}{11}} - 1$ ó 0,3484, nous retiendrons : $M = \sqrt{\frac{20}{11}} - 1$.

◆ Cas où $x' > x$ et $y' < y$

$\frac{\Delta x}{x} < M$ s’écrit encore : $x > \frac{1}{1+M}x'$

La condition $\frac{\Delta y}{y} < M$ n’apporte, en revanche, pas d’autre minoration que $y > y'$.

Ainsi, l’hypothèse (H) implique : $xy > \frac{1}{1+M}\,x'y'$.

Il suffit donc de choisir M tel que $\frac{1}{1+M}$ Ã $\frac{11}{20}$ pour satisfaire (1).

Or M > 0 et $\frac{1}{1+M}$ Ã $\frac{11}{20}$ conduisent à : 0 < M Â $\frac{9}{11}$

et comme $\frac{9}{11} > \sqrt{\frac{20}{11}} - 1$, nous retiendrons encore $M = \sqrt{\frac{20}{11}} - 1$.

Conclusion de la méthode d'optimisation de l'erreur relative

L'étude menée ci–dessus conduit à choisir $M = \sqrt{\frac{20}{11}} - 1$.

Si l'erreur relative sur *x* et sur *y* est strictement inférieure à M, alors le produit estimé *x'y'* est plus proche du produit *xy* que de tous les autres nombres obtenus en plaçant une virgule au produit XY des entiers X et Y associés à *x* et à *y*.

Pour placer la virgule au produit XY de manière à obtenir *xy*, il suffira donc de choisir le nombre décimal le plus proche du produit estimé *x'y'*.

Utilisation de la méthode d'optimisation de l'erreur relative

Examinons maintenant comment, dans la pratique, choisir un ordre de grandeur suffisant pour que l'erreur relative portant sur *x* et sur *y* soit inférieure à $\sqrt{\frac{20}{11}} - 1$.

Une précision d'un chiffre est suffisante

Choisissons, comme ordre de grandeur de *x*, le nombre *x'* défini par :
$x' = a' * 10^n$ où *a'* est la valeur arrondie **à l'unité** de *a*.

Nous avons montré dans l'étude précédente que ce choix d'ordre de grandeur conduit à une erreur relative $\frac{\Delta x}{x}$ inférieure à $\frac{1}{3}$.

Comme $M \approx 0{,}3484$, ce choix d'ordre de grandeur pour les facteurs *x* et *y* conduit nécessairement à : $\frac{\Delta x}{x} < M$ et $\frac{\Delta y}{y} < M$.

Nous en concluons que la méthode d'optimisation de l'erreur relative est directement applicable.

Illustrons son utilisation sur les exemples qui nécessitaient un ajustement de la méthode d'optimisation de l'erreur absolue.

Exemples d'utilisation de la méthode d'optimisation de l'erreur relative

Premier exemple

Considérons les deux décimaux $x = 1{,}45$ et $y = 147{,}2$;
les facteurs entiers associés sont X = 145 et Y = 1 472 donc XY = 213 440 ;
les ordres de grandeur des facteurs sont $x' = 1$ et $y' = 100$ donc $x'y' = 100$.

On choisit le nombre le plus proche de 100, obtenu en plaçant une virgule à 213 440.

Mentalement, $\frac{100 - 21{,}344}{21{,}344}$ ó $\frac{80}{20}$ donc $\frac{100 - 21{,}344}{21{,}344}$ ó 4

et $\frac{213{,}44 - 100}{213{,}44}$ ó $\frac{100}{200}$ donc $\frac{213{,}44 - 100}{213{,}44}$ ó $\frac{1}{2}$

Nous en concluons que $xy = 213{,}44$.

Deuxième exemple

Soit à multiplier 148,17 et 24,9.

$$\begin{array}{rrcrr} & 1\,4\,8{,}1\,7 & \rightarrow & & 1\,0\,0 \\ * & 2\,4{,}9 & \rightarrow & * & 2\,0 \\ \hline & 3\,6\,8\,9\,4\,3\,3 & & & 2\,0\,0\,0 \end{array}$$

On choisit le nombre le plus proche de 2 000, en plaçant une virgule au nombre entier 3 689 433.

Mentalement, $\frac{2000 - 368{,}9433}{368{,}9433}$ ó $\frac{1600}{400}$ donc $\frac{2000 - 368{,}9433}{368{,}9433}$ ó 4

et $\frac{3689{,}433 - 2000}{3689{,}433}$ ó $\frac{1600}{4000}$ donc $\frac{3689{,}433 - 2000}{3689{,}433}$ ó 0,4

Nous en concluons que $148{,}17 * 24{,}9 = 3\,689{,}433$.

Conclusion

Nous avons donc montré que des méthodes différentes d'utilisation des ordres de grandeur sont utilisables de façon légitime pour contrôler la place de la virgule au produit de nombres décimaux positifs. Il reste qu'aucune de ces méthodes n'est simple d'utilisation. Toutes semblent plus difficiles à mettre en œuvre correctement que la technique opératoire usuelle...

Il semble que les concepteurs du programme de sixième, et plus généralement de l'enseignement primaire et secondaire, en intégrant l'utilisation de la calculatrice parmi les modes de calcul légitimes dans une salle de classe ont souhaité compenser la perte de moyens de contrôler le résultat obtenu en passant du calcul écrit au calcul électronique. Certains manuels de l'enseignement primaire indiquent d'ailleurs aux élèves que c'est cette possibilité de contrôle explique la domination du calcul écrit par rapport à l'utilisation d'abaques ou de bouliers. L'utilisation des ordres de grandeur était familière à ceux qui utilisaient la règle à calcul avant le récent développement de l'électronique, le retour de leur utilisation n'est donc pas surprenant. L'âge des élèves qui utilisaient la règle à calcul était plus élevé que celui des élèves qui utilisent aujourd'hui une calculatrice, leur capacité de calcul mental et d'assimilation de notion comme l'erreur absolue ou l'erreur relative était aussi plus élevée.

Les développements que nous avons conduits montrent, d'une part qu'il n'est pas envisageable de justifier ces techniques de calcul approché aux élèves de collège, et d'autre part que leur utilisation empirique risque de conduire à des erreurs. Autrement dit, l'enseignement des techniques de calcul approché pose un problème de transposition didactique tel que des recherches spécifiques apparaissent nécessaires.